Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 12 (a entregar na semana de 30/05/2005)

Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 - y^2 - z^2\,,\ z > 0\,, x > 1\,\},$$

e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = (-2x, y, z).$$

Calcule o fluxo $\int_S F \cdot \nu$ segundo o sentido da normal ν que tem a primeira componente positiva, de três formas distintas:

(a) pela definição de fluxo;

(b) utilizando o Teorema da Divergência;

(c) utilizando o Teorema de Stokes.

Resolução

(a) A superfície S é uma superfície de revolução em torno do eixo $0x$. Em coordenadas cilíndricas apropriadas (ρ, θ, x), S é definida por $x = 2 - \rho^2$ com $x > 1$ e $z > 0$, logo S é parte de um parabolóide, que se pode ver na figura seguinte:

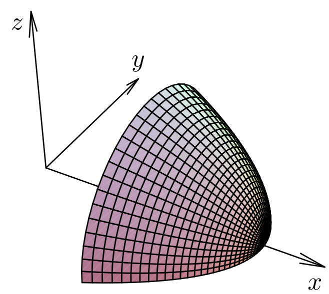

Figura 1: A superfície S

Uma parametrização para S é dada por

$$g(\rho,\theta) = (2-\rho^2, \rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta), \quad 0 < \theta < \pi,\ 0 < \rho < 1.$$

Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ -2\rho & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = (\rho, 2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\operatorname{sen}\theta).$$

A primeira componente de $\dfrac{\partial g}{\partial \rho} \times \dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ é positiva, portanto este vector tem o sentido da normal pedida à superfície. Conclui-se que

$$\begin{aligned}
\int_S F \cdot n\, dS &= \int_0^{\pi}\int_0^1 F(g(\rho,\theta)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}\right) d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^1 (-2(2-\rho^2), \rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) \cdot (\rho, 2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^1 -2\rho(2-\rho^2) + 2\rho^3\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[\frac{2-\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{2}\right]_0^1 d\theta = -\pi.
\end{aligned}$$

(b) F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ logo podemos aplicar o Teorema da Divergência à região

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x < 2 - y^2 - z^2,\ x > 1,\ z > 0\}.$$

A fronteira de D é formada por S, por metade de um disco

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1,\ x = 1,\ z > 0\}$$

e pela superfície no plano $z = 0$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 2 - y^2,\ z = 0,\ x > 1\}.$$

Uma vez que a normal a S dada, n, é a normal exterior a D, o teorema da divergência diz que

$$\int_D \mathrm{div}\, F\, dx\, dy\, dz = \int_S F \cdot n\, dS + \int_{S_1} F \cdot n_1\, dS + \int_{S_2} F \cdot n_2\, dS$$

onde $n_1 = (-1,0,0)$ e $n_2 = (0,0,-1)$ são as normais ás superfícies S_1 e S_2, respectivamente. Como

$$\mathrm{div}\, F = 2 - 1 - 1 = 0$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}
\int_S F \cdot n\, dS &= -\int_{S_1} F \cdot n_1\, dS - \int_{S_2} F \cdot n_2\, dS \\
&= -\int_{S_1} 2x\, dS - \int_{S_2} -z\, dS \\
&= -\int_{S_1} 2\, dS - \int_{S_2} 0\, dS \\
&= -2\ \text{área}(S_1) = -2\frac{\pi}{2} = -\pi.
\end{aligned}$$

(c) Uma vez que F é solenoidal (isto é, $\mathrm{div}\, F = 0$) e o domínio de F é $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluimos que F é um rotacional. Para achar um potencial vector A temos de resolver o sistema

$$\mathrm{rot}\, A = F \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = (-2x, y, z)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -2x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = z \end{cases}$$

Fazendo, por exemplo, $A_1 = 0$ obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -2x \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -2x \\ A_3(x,y,z) = -yx + C_3(y,z) \\ A_2(x,y,z) = zx + C_2(y,z) \end{cases}$$

Substituindo na primeira equação obtemos

$$-x + \frac{\partial C_3}{\partial y}(y,z) - x - \frac{\partial C_2}{\partial z}(y,z) = -2x$$

pelo que podemos fazer $C_2(y,z) = C_3(y,z) = 0$. Conclui-se que um potencial vector para F é dado por

$$A(x,y,z) = (0, zx, -yx).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S F \cdot n \, dS = \int_S \operatorname{rot} A \cdot n \, dS = \oint_{\partial S} A \cdot \, d\gamma.$$

O bordo de S é a união das seguintes curvas:

$$\Gamma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, \, x = 1, \, z > 0\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 - y^2, \, z = 0, \, x > 1\}.$$

De acordo com a regra da mão direita, Γ_1 deve ser percorrida do ponto $(1,1,0)$ para o ponto $(1,-1,0)$ e Γ_2 deve ser percorrida no sentido contrário, ou seja, do ponto $(1,-1,0)$ para o ponto $(1,1,0)$.

Uma parametrização de Γ_1 é

$$\gamma_1(t) = (1, \cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 < t < \pi$$

e uma parametrização para Γ_2 é

$$\gamma_2(t) = (2 - t^2, t, 0), \quad -1 < t < 1,$$

que percorrem as curvas no sentido desejado. Assim,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n \, dS &= \oint_{\Gamma_1} A \cdot \, d\gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} A \cdot \, d\gamma_2 \\ &= \int_0^\pi (0, \operatorname{sen} t, -\cos t) \cdot (0, -\operatorname{sen} t, \cos t) \, dt \\ &+ \int_{-1}^1 (0, 0, -t(2-t^2)) \cdot (-2t, 1, 0) \, dt \\ &= \int_0^\pi -1 \, dt + 0 = -\pi. \end{aligned}$$