Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º semestre de 2004/2005

Exercício-Teste 10 (a entregar na semana de 16/05/2005)

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1 < x^2 + y^2 < 4\,,\ y > 0\}.$$

S tem densidade de massa por unidade de área dada por

$$\sigma(x, y, z) = \frac{e^{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Calcule o momento de inércia de S relativamente ao eixo dos z.

Resolução:

Podemos parametrizar S usando as coordenadas ρ, θ das coordenadas cilíndricas:

$$g(\rho, \theta) = (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta)) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, e^\rho),$$

com $1 < \rho < 2$ e $0 < \theta < \pi$, pois $y > 0$ em S.

Temos,

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \\ e^\rho & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ D_\rho g & D_\theta g \\ | & | \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\sqrt{\det Dg^t Dg} = ||D_\rho g \times D_\theta g|| = \rho\sqrt{1 + e^{2\rho}}.$$

Temos, finalmente,

$$I_z(S) = \int_S \sigma d_z^2 = \int_0^\pi \int_1^2 \frac{e^{2\rho}}{\rho^3} \rho^2 \rho \sqrt{1 + e^{2\rho}} d\theta d\rho =$$

$$= \pi \int_1^2 e^{2\rho}\sqrt{1 + e^{2\rho}} = \frac{\pi}{3}(1 + e^{2\rho})^{3/2}|_1^2 = \frac{\pi}{3}((1 + e^4)^{3/2} - (1 + e^2)^{3/2}).$$