

ANÁLISE MATEMÁTICA III  
CURSOS DE ENG. CIVIL E ENG. DE TERRITÓRIO  
TESTE 1 – 10 DE NOVEMBRO DE 2003

**apresente e justifique todos os cálculos**

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere o sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < x, 0 < z < 1 - x^2\}.$$

(3 val.)

(a) Escreva uma expressão para o volume de  $V$  em termos de integrais iterados da forma  $\iiint dx dy dz$ .

(3 val.)

(b) Calcule o integral  $\iiint_V 2y$  usando um integral iterado da forma  $\iiint dz dy dx$ .

(3 val.)

(2) Um sólido com a forma da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < x^2 + y^2; x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$$

tem densidade de massa  $\sigma(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

(3) Considere os campos vectoriais  $F$  e  $G$  definidos por

$$F(x, y, z) = (3zx^2, \sin z + z, y \cos z + y + x^3)$$

$$G(x, y, z) = \left( \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, 0 \right)$$

(3 val.)

(a) Calcule o integral de linha de  $F$  ao longo de um arco de circunferência definido por  $y^2 + z^2 = 1$  e  $x = 1$ , desde o ponto  $(1, 1, 0)$  até ao ponto  $(1, 0, 1)$ .

(2 val.)

(b) Mostre que  $G$  é fechado. Diga, justificadamente, se  $G$  é ou não um gradiente no seu domínio.

(3 val.)

(c) Calcule o trabalho

$$\int_{\Gamma} (F + G) \cdot dg$$

onde  $\Gamma$  é a fronteira do quadrado, no plano  $z = 0$ , que une os pontos  $(2, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$  e  $(2, -1, 0)$ , percorrida no sentido anti-horário para um observador colocado no ponto  $(1, 0, 5)$ .

(3 val.)

(4) Seja  $R$  uma região elementar em  $\mathbb{R}^2$  com área  $A$  e cuja fronteira é uma curva  $C$  regular e simples. Prove que o centróide  $(\bar{x}, \bar{y})$  de  $R$  é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2 dx.$$