

ANÁLISE MATEMÁTICA III
PARA OS CURSOS LEAN, LEC, LEGMIN, LEIC, LEM, LEMAT, LET
TESTE DE RECUPERAÇÃO 1
9 DE JANEIRO DE 2004

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere o seguinte conjunto

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1; 0 < y < \frac{\pi}{2}; x + 1 < z < 3 - x^2 \right\}.$$

(2 val.) (a) Calcule

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \cos(y) dz \right) dx \right) dy.$$

(3 val.) (b) Dada uma função f integrável em V , escreva uma expressão para $\int_V f$ na forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f dy \right) dx \right) dz.$$

(4 val.) (2) Calcule o volume do sólido dado por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < \sin(z); 0 < z < \frac{\pi}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

(3) Seja F o campo vectorial definido em $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e dado por

$$F = \left(3x^2y^2z - \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, 2x^3yz + \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, x^3y^2 \right).$$

(2 val.) (a) Mostre que F é fechado no seu domínio.

(3 val.) (b) Calcule o trabalho realizado por F ao longo do arco C da circunferência $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1; z = 1\}$ (percorrida no sentido dos ponteiros do relógio para um observador colocado em $(1, 0, 100)$) com início no ponto $(0, 0, 1)$ e fim no ponto $(1, 1, 1)$.

(3 val.) (c) Escolha um caminho com início e fim nos mesmos pontos mas com diferente valor para o trabalho realizado por F . Calcule o valor do trabalho. F é gradiente no seu domínio? Justifique.

(3 val.) (4) Determine, justificando os seus passos, a área do conjunto $A = B \setminus S$ onde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 5; |y| < 1\}$$

e

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y^2 + 1} = \alpha; \alpha \in \mathbb{Q} \cup [1, 2] \right\}.$$