Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

CURSOS DE ENG. CIVIL E ENG. DE TERRITÓRIO

TESTE 1 – 10 DE NOVEMBRO DE 2003

Resolução

(1) Considere o sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 \,,\, 0 < y < x \,,\, 0 < z < 1 - x^2\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\iiint dx\, dy\, dz$.

(3 val.) (b) Calcule o integral $\iiint_V 2y$ usando um integral iterado da forma $\iiint dz\, dy\, dx$.

RESOLUÇÃO:
(a) A região V é constituída pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, com coordenadas (x, y) no triângulo definido pelas equações $0 < x < 1$ e $0 < y < x$ e com coordenada z entre o plano $z = 0$ e a superfície $z = 1 - x^2$. Como esta superfície se obtém translandando o gráfico da parábola (no plano $x0z$) ao longo do eixo $0y$, obtemos o seguinte esboço:

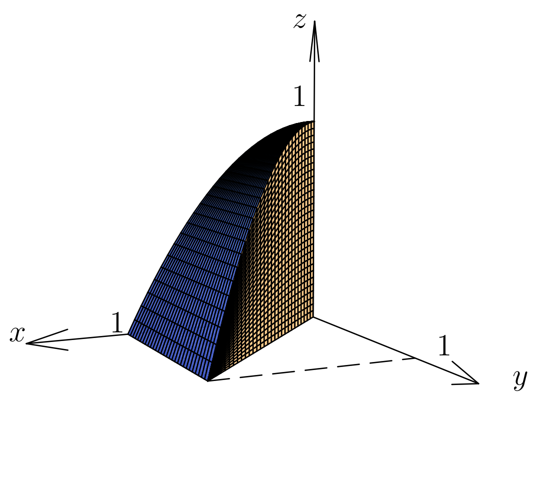

FIGURA 1. Esboço da região V.

Para o integral iterado pedido, há que fixar primeiro a coordenada z. Do esboço acima é claro que se fixarmos $z \in [0, 1]$ obtemos como corte um triângulo:

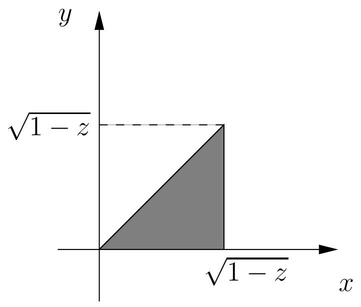

FIGURA 2. Corte em V perpendicular ao eixo $0z$.

Assim, o integral iterado escreve-se:

$$\mathrm{vol}(V) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_y^{\sqrt{1-z}} dx\,dy\,dz.$$

(b) Para o integral iterado pedido, há que fixar primeiro a coordenada x. Assim, se fixarmos $x \in [0,1]$ obtemos como corte:

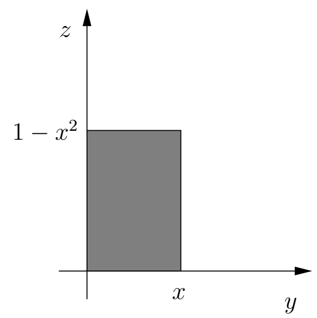

FIGURA 3. Corte em V perpendicular ao eixo $0x$.

Donde:

$$\begin{aligned}
\iiint_V 2y &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x^2} 2y\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x 2y(1-x^2)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 [(1-x^2)y^2]_0^x\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 - x^4\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

(3 val.) (2) Um sólido com a forma da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z^2 < x^2 + y^2 \, ; \, x^2 + y^2 + z^2 < 2\,\}$$

tem densidade de massa $\sigma(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

RESOLUÇÃO: Observe que este sólido possui simetria esférica. De facto, B é a região entre a superfície cónica $z^2 = x^2 + y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ centrada na origem de raio $\sqrt{2}$:

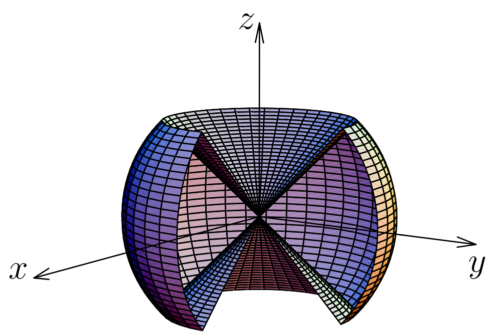

Figura 4. Esboço da região B.

Assim, vamos utilizar uma trnasformação $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = r\cos\phi. \end{cases}$$

O determinante desta matriz Jacobiana desta transformação é então

$$|\det(Dg(r, \theta, \phi))| = r^2 \operatorname{sen}\phi$$

e nestas coordenadas a região é descrita por

$$g^{-1}(B) = \left\{(r, \theta, \phi) : 0 < r < \sqrt{2},\, 0 < \theta < 2\pi,\, \frac{\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Assim, a massa total do sólido B é dada por

$$
\begin{aligned}
M(B) &= \iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{g^{-1}(B)} \frac{1}{r} r^2 \operatorname{sen}\phi\,dr\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} r \operatorname{sen}\phi\,dr\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [-\cos\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\,d\theta \\
&= 2\pi(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

(3) Considere os campos vectoriais F e G definidos por

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \left(3zx^2, \operatorname{sen} z + z, y\cos z + y + x^3\right) \\
G(x,y,z) &= \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}, 0\right)
\end{aligned}
$$

(3 val.) (a) Calcule o integral de linha de F ao longo de um arco de circunferência definido por $y^2+z^2=1$ e $x=1$, desde o ponto $(1,1,0)$ até ao ponto $(1,0,1)$.

(2 val.) (b) Mostre que G é fechado. Diga, justificadamente, se G é ou não um gradiente no seu domínio.

(3 val.) (c) Calcule o trabalho

$$\int_\Gamma (F+G)\cdot dg$$

onde Γ é a fronteira do quadrado, no plano $z=0$, que une os pontos $(2,1,0),(0,1,0),(0,-1,0)$ e $(2,-1,0)$, percorrida no sentido anti-horário para um observador colocado no ponto $(1,0,5)$.

RESOLUÇÃO:

(a) F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Temos

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 3x^2 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \cos z + 1 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

logo F é fechado. Uma vez que $\mathbb{R}^3$ é um conjunto em estrela conclui-se que F é um gradiente. Um potencial ϕ para F obtém-se resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial\phi}{\partial x} & = & 3zx^2 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} & = & \operatorname{sen} z + z \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} & = & y\cos z + y + x^3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \phi(x,y,z) & = & zx^3 + C_1(y,z) \\ \phi(x,y,z) & = & y\operatorname{sen} z + yz + C_2(x,z) \\ \phi(x,y,z) & = & y\operatorname{sen} z + yz + zx^3 + C_3(x,y) \end{array}\right.$$

donde se conclui que um potencial para F é dado por

$$\phi(x,y,z) = y\operatorname{sen} z + yz + zx^3.$$

Para calcular o trabalho realizado por F ao longo do arco de circunferência C usamos o teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e obtemos

$$W = \int_C F\cdot\ dg = \phi(1,0,1) - \phi(1,1,0) = 1 - 0 = 1.$$

(b) G é fechado pois

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{y^2 - (x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial G_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial G_3}{\partial y}.$$

O campo G é de classe C^1 no seu domínio $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$. Vamos escolher uma curva fechada contida no domínio e calcular o trabalho de G ao longo dessa curva. Escolhemos uma circunferência $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, percorrida no sentido indicado pela seguinte parametrização $h : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$:

$$h(t) = (\cos t + 1, \sin t, 0).$$

Assim o trabalho realizado por G ao longo de C é dado por

$$\int_C G\cdot\ dh = \int_0^{2\pi} G(h(t))\cdot h'(t)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\ dt = 2\pi.$$

O campo G não é um gradiente, porque o integral de G ao longo da curva regular e fechada C não é zero, ou seja, $\int_C G\cdot\ dh \neq 0$.

(c) Observe que

$$\int_\Gamma (F+G)\cdot dg = \int_\Gamma F\cdot dg + \int_\Gamma G\cdot dg = \int_\Gamma G\cdot dg$$

pois $\displaystyle\int_\Gamma F\cdot dg = 0$ visto que Γ é uma curva fechada em $\mathbb{R}^3$ e F é um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$. Por outro lado a curva Γ e a circunferência C da alínea anterior são caminhos homotópicos no domínio do campo G e o campo G é fechado, logo, pela invariância de integrais de linha de campos fechados sobre caminhos fechados homotópicos, temos

$$\int_\Gamma (F+G)\cdot dg = \int_\Gamma G\cdot dg = \int_C G\cdot dh = 2\pi.$$

(3 val.) (4) Seja R uma região elementar em $\mathbb{R}^2$ com área A e cuja fronteira é uma curva C regular e simples. Prove que o centróide $(\overline{x},\overline{y})$ de R é dado por

$$\overline{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2 dy, \quad \overline{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2 dx.$$

RESOLUÇÃO: As coordenadas do centróide $(\overline{x},\overline{y})$ são dadas por

$$\overline{x} = \frac{\iint_R x\,dx\,dy}{\iint_R dx\,dy} = \frac{1}{A}\iint_R x\,dx\,dy$$

$$\overline{y} = \frac{\iint_R y\,dx\,dy}{\iint_R dx\,dy} = \frac{1}{A}\iint_R y\,dx\,dy.$$

Uma vez que R é uma região elementar podemos usar o Teorema de Green, que nos diz que para um campo $F=(P,Q) : R \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 temos

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_C P\,dx + Q\,dy,$$

onde a curva $C = \partial R$ é percorrida no sentido directo.

Escolhendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $F(x,y) = \left(0, \frac{x^2}{2}\right)$ obtemos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x$, portanto

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_R x\,dx\,dy = \frac{1}{A}\oint_C 0\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy.$$

Escolhendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $F(x,y) = \left(-\frac{y^2}{2}, 0\right)$ obtemos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y$, portanto

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\iint_R y\,dx\,dy = \frac{1}{A}\oint_C -\frac{y^2}{2}\,dx + 0\,dy = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx.$$