Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TESTE DE RECUPERAÇÃO 1

18 DE JUNHO DE 2005

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00 - 10:30)

(1) Considere a região

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z>1\,;\ x+y<1\,;\ x>0\,;\ y>0\,;\ 0<z<2\}.$$

(2 val) (a) Exprima o volume de V em termos de integrais iterados da forma

$$\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx.$$

Resolução: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{1-x-y}^{2} dz\, dy\, dx$

(2 val) (b) Exprima o volume de V em termos de integrais iterados da forma

$$\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz.$$

Resolução:

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-z} \int_{1-z-y}^{1-y} dx\, dy + \int_{1-z}^{1} \int_0^{1-y} dx\, dy \right] dz + \int_1^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dx\, dy\, dz$$

(2 val) (c) Calcule o integral $\int_V \frac{1}{1+x+y}$.

Resolução:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{1-x-y}^{2} \frac{1}{1+x+y} dz\, dy\, dx = \frac{1}{2}$$

(4 val) (2) Considere o sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<2\,;\ 0<z<x^2+y^2\}$ com densidade de massa $\sigma = 1$. Calcule o momento de inércia de S relativo ao eixo Oz.

Resolução:

$$\int_S \sigma \cdot (x^2+y^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2-z^2}} r^2 \cdot r\, dr\, dz\, d\theta = \frac{19}{15}\pi$$

(3) Considere os campos vectoriais

$$F(x,y) = \left(\frac{xy}{1+x}, -\log(1+x)\right) \qquad \text{e} \qquad G(x,y) = (0,x)$$

definidos na região

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+1 > 0\}.$$

(2 val) (a) Calcule o trabalho realizado pelo campo $F+G$ ao longo do triângulo com vértices nos pontos $(0,0),(1,1)$ e $(2,0)$ percorrido no sentido anti-horário.
Resolução: $F+G$ é fechado, e Ω é simplesmente conexo e, portanto, o trabalho é nulo.

(2 val) (b) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo do triângulo com vértices nos pontos $(0,0),(1,1)$ e $(2,0)$ percorrido no sentido anti-horário.
Resolução: Seja C o triângulo com vértices nos pontos $(0,0),(1,1)$ e $(2,0)$ percorrido no sentido anti-horário. Sendo $\int_C (F+G) = 0$, então $\int_C F = -\int_C G$. Aplicando o teorema de Green ao campo G, obtém-se $\int_C F = -\int_C G = -\int_\Delta 1 = -1$, em que Δ é o interior do triângulo C.

(3 val) (c) Determine uma função real $\varphi(x,y)$ tal que $\varphi(0,0) = 0$ e $\nabla\varphi = F+G$. Determine, justificando, se esta função é única.
Resolução: É fácil ver que $\varphi(x,y) = xy - y\log(1+x)$. Seja $\psi(x,y)$ uma funcão de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω. Tem-se $\psi(x,y) - \psi(0,0) = \int_0^1 \nabla\psi \cdot (x,y)\,dt$ para qualquer $(x,y) \in \Omega$. Portanto, dado que $\nabla\psi = \nabla\varphi$ e $\psi(0,0) = \varphi(0,0)$, obtemos $\varphi(x,y) = \psi(x,y)$, ou seja, o potencial escalar é único.

(4) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Considere a região

$$V(f) = \{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, t) \in \mathbb{R}^3 : a < t < b\,;\ -\pi < \theta < \pi\,;\ 0 \le r < f(t)\}.$$

(2 val) (a) Calcule o volume de $V(f)$ em termos de f.
Resolução:

$$\text{vol}(V(f)) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_a^b\int_0^{f(t)} r\,dr\,dt\,d\theta = \pi\int_a^b [f(t)]^2\ dt$$

(1 val) (b) Usando a alínea anterior, determine o volume do cone de altura 1 e raio 1.
Resolução: O cone é descrito por $f(t) = t, a = 0$ e $b = 1$ e, portanto,

$$\text{vol}(V(f)) = \pi\int_0^1 t^2\,dt = \frac{\pi}{3}$$