Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 23 de Abril de 2005 - 11h
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y \le z \le 2\,;\ x+y \le 1\,;\ x \ge 0\,;\ y \ge 0\}.$$
(2) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$.
(2) b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$.
(2) c) Calcule $\displaystyle\int_V \frac{1}{2-x-y}$.

2. Considere o sólido
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4\,;\ 1 \le x^2+y^2\,;\ y \ge 0\}.$$
(4) Calcule a massa de A sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x,y,z) = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$.

3. Considere os campos vectoriais F e H definidos por
$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (yz^2, xz^2, 2xyz) \\ H(x,y,z) &= \left(-\frac{y}{(x-1)^2+4y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+4y^2}, 0\right). \end{aligned}$$
(2) a) Mostre que F é um gradiente no seu domínio e calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dg$, onde C é a curva descrita pelo caminho $g(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$, com $t \in [0, \pi/4]$.
(2) b) Usando a definição, calcule o integral de linha de H ao longo da elipse $(x-1)^2+4y^2 = 1$, $z = 0$, percorrida no sentido anti-horário quando observada do ponto $(1,0,5)$.
(3) c) Calcule $\displaystyle\int (F+H) \cdot d\alpha$ onde α é o caminho fechado que descreve a linha quadrada no plano $z = 0$ que une os pontos $(0,-1,0), (2,-1,0), (2,1,0), (0,1,0)$ e percorrida por esta ordem.

(3) 4. Considere o conjunto
$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1\}.$$
Mostre que para qualquer função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, se tem
$$\int_U f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{1}{n!} \left[\int_0^1 f(t) dt\right]^n.$$