

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

EXAME 2 – 29 DE JANEIRO DE 2003

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 3 horas (17h-20h) cotação: 2 valores por alínea

(1) Considere a seguinte região de \mathbb{R}^3 :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, e^x \leq z \leq e\}.$$

(a) Calcule o integral $\iiint_V \frac{1}{z}$.

(b) Escreva uma expressão para $\iiint_V f$ da forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

(2) Um sólido com a forma da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2, y > 0, z > 0\}$$

tem densidade de massa dada por cz onde $c > 0$ é uma constante. Calcule a constante c sabendo que a massa total desse sólido é 15π .

(3) Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left(y, x - \frac{z}{y^2 + z^2}, z + \frac{y}{y^2 + z^2} \right)$$

definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determine se F é ou não um gradiente no seu domínio.

(b) Diga quais são todos os valores possíveis para o trabalho de F ao longo de caminhos desde o ponto $(0, 1, 0)$ até ao ponto $(0, -1, 0)$.

(continua)

- (4) Considere a superfície $A \subset \mathbb{R}^3$ definida pela equação $z = x^2 - y^2$, com $x^2 + y^2 < 1$.
- Calcule a área de A .
 - Diga se é ou não possível parametrizar uma vizinhança de A contendo o ponto $(1, 1, 0)$ escrevendo y como função de x e z .

- (5) Utilizando o teorema da divergência, calcule o fluxo do campo vectorial

$$G(x, y, z) = (2x, 2y, -4z + 1)$$

através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - 2(x^2 + y^2)^4, x^2 + y^2 < 1\}$$

no sentido da normal unitária com terceira componente positiva n .

- (6) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo

$$H(x, y, z) = (-y^3, x^3, e^{x+y} \cos(z + 1))$$

ao longo da circunferência C dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$, percorrida num sentido à sua escolha.

- (7) Mostre que o conjunto

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt, z = \int_0^1 e^{-x^2 t^3} dt \right\}$$

é uma variedade e diga qual é a sua dimensão. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y, z) = \frac{7}{12}x^2 + y + z$ quando restrita a M .