Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

6^a Ficha de Exercícios

(Eng^a Biológica, Eng^a Electrotécnica, Eng^a Química, Gestão, Química)

Fórmula e Série de Taylor

1.

a) Seja f uma função três vezes diferenciável numa vizinhaça do ponto a e suponha que $f''(a) = 0$ e $f'''(a) \neq 0$. Prove que a é um ponto de inflexão de f.

b) Seja f uma função quatro vezes diferenciável numa vizinhaça do ponto a e suponha que $f''(a) = f'''(a) = 0$ e $f^{(iv)}(a) \neq 0$. Prove que f é convexa ou côncava no ponto a conforme $f^{(iv)}(a) > 0$ ou $f^{(iv)}(a) < 0$.

2. Prove que o gráfico de uma função f, cujo domínio contém um intervalo não majorado, tem uma assímptota à direita se existem e são finitos os limites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (que designaremos por m),

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$ (que designaremos por p).

A assímptota é a recta de equação $y = mx + p$.

3. Prove que, se a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

para um certo $n \in \mathbb{N}$, então $f(x)$ é um polinómio em x de grau menor do que n.

4. Prove que se $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável e se $g'''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então g não pode ter mais de dois pontos de extremo local.

Admitindo agora que g tem de facto extremos locais nos pontos α e β com $\alpha < \beta$, indique se $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ são máximos ou mínimos da função. Justifique.

Escreva a fórmula de Taylor para g em relação ao ponto β e com resto de Lagrange ordem e aproveite para mostrar que $g(x) > g(\beta)$ para $x > \beta$. *(Grupo IVb do 2º Teste de 7/4/79)*

6. Esboce o gráfico das funções dadas, tendo em conta os seguintes aspectos: domínio, continuidade, diferenciabilidade, monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas:

a) x^3e^{-x}, b) $\arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, c) $\dfrac{x}{1+\log|x|}$. d) $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

6. Determine os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin das seguintes funçoēs, indicando a região onde são válidos.

a) $\dfrac{1}{1+x^2}$, b) $\arctan x$, c) $\log(1+x)$, d) $\sin^2 x$, e) $\dfrac{1}{(1-x)(1+x^2)}$.

7. Determine os desenvolvimentos em série de Taylor das seguintes funçoēs em torno do ponto 2, indicando a região onde são válidos.

a) $\dfrac{1}{3+x}$, b) $\sqrt{x}$ c) x^3, d) e^x, e) $\log x$.

8. Sejam f e g duas funções uma vez difenciáveis tais que

$$f'(x) = g(x), \qquad g'(x) = -f(x), \qquad \forall_{x\in\mathbf{R}},$$

$f(0) = 0$ e $g(0) = 1$.

1° Prove que

a) f e g são indefinidamente diferenciáveis.

b) Qualquer das funções f e g é desenvolvível em série de Mac-Laurin, série essa que representa a função considerada para o ponto $x \in \mathbb{R}$.

2° Utilize o método dos coeficientes indeterminados para obter os desnvolvimentos de Mac-Laurin de f e g.

3° Prove que $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1, \qquad \forall_{x\in\mathbf{R}}$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe C^3 e $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f'(a) = f''(a) = 0, \qquad \text{e} \qquad f'''(x)(x-a) > 0, \qquad \text{se } x \neq a.$$

Mostre que f tem um mínimo absoluto no ponto a.