

ANÁLISE MATEMÁTICA II

5ª Ficha de Exercícios

(Eng^a Biológica, Eng^a Electrotécnica, Eng^a Química, Gestão, Química)

Integração (continuação)

7. Calcule:

a) $\int_0^{\pi/4} \sin(2x) \cos(2x) dx$; b) $\int_0^1 e^{t+e^t} dt$; c) $\int_0^\pi \sin^3 u, du$;
d) $\int_0^{\pi/3} \frac{8 \tan x}{1 + \sin^2 x} dx$; e) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx$; f) $\int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) dx$
g) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \arctan x dx$

8. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_{\pi/2}^{\arctan x} \sin(t^2) dt$.

9. Sendo f uma função contínua em \mathbb{R} mostre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \int_0^{1/x} f(t) dt \right)^x = e^{f(0)}.$$

10. Prove que se f é uma função diferenciável em \mathbb{R} , verificando a condição:

$$\int_0^x f(t) dt = xf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

então f é constante.

11. Relembre que uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T > 0$, sse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T > 0$, então

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$$

é uma função constante em \mathbb{R} .

12. Mostre que, para qualquer $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Interprete graficamente.

(Sugestão: use uma substituição de variável adequada.)

13. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

$$\text{a) } f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt; \quad \text{b) } g(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{\log t} dt$$

14. Sendo f uma função contínua em \mathbb{R} , prove que, se é nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Mostre, por meio de exemplos, que a conclusão precedente poderia ser falsa em qualquer das três hipóteses seguintes:

1º. Se em vez de supôr f contínua em \mathbb{R} , se supusesse apenas que f era integrável em intervalos limitados.

2º. Se, em lugar de supôr nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, se admitisse que era nulo o integral de f em qualquer intervalo de comprimento 1.

3º. Se, em vez de supôr que era nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, se admitisse que era nulo o integral em qualquer intervalo do tipo $[-a, a]$, com $a > 0$.

15. Determine a área de cada uma das seguintes regiões do plano

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge x^2 - 1 \leq y \leq \arccos x\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x + 2\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \log x \wedge x \leq a\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge |x| + |y| \geq 1\}$

Para as três primeiras regiões acima determine o comprimento da linha que serve de fronteira à região em causa.