

ANÁLISE MATEMÁTICA II

4ª Ficha de Exercícios

(Eng.^a Biológica, Eng.^a Electrotécnica, Eng.^a Química, Gestão, Química)

Integração

1. Calcule

a) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, b) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$, c) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \log x dx$, d) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx$.

2. Determine as derivadas das funções seguintes:

a) $\int_1^x \sin(t^2) dt$, b) $\int_x^{2\pi} \cos(t^2) dt$, c) $\int_x^{2x} e^{t^2} dt$,
d) $\int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$, e) $\int_{x^2}^{x^4} \sin(\sqrt{t}) dt$.

3. Dado $A \subset \mathbb{R}$, designe-se por $\chi_A(t)$ a função característica do conjunto A , isto é, $\chi_A(t) = 1$ se $t \in A$, e $\chi_A(t) = 0$ se $t \notin A$. Calcule e esboce o gráfico de

$$\varphi_A(x) = \int_0^x \chi_A(t) dt,$$

justificando a existência do integral, quando

- A é conjunto dos inteiros;
- $A = [0, +\infty[$;
- $A = [-2, -1] \cup [0, +\infty[$.

4. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt,$$
$$\int_{-x}^x g(t) dt = 0.$$

- a) Mostre que f é uma função par e g é uma função ímpar.
b) Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e de uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, integráveis em todos os intervalos limitados de \mathbb{R} , que verificam as igualdades anteriores e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

5. Calcule as áreas dos seguintes conjuntos:

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$;
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x, y \geq x^3, y \leq 4x\}$.

6. Calcule o comprimento de um arco de circunferência de raio r e ângulo α .