Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

3^a Ficha de Exercícios

(Eng^a Biológica, Eng^a Electrotécnica, Eng^a Química, Gestão, Química)

Primitivação (continuação)

6. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $|x|$, b) $x \arcsin \dfrac{1}{x}$, c) $\sqrt{1+\sqrt{x}}$,

d) $\sin(\log x + 1)$, e) $\cos^3 x \sqrt{\sin x}$, f) $\sqrt{x} \arctan \sqrt{x}$,

g) $\dfrac{1+\log^2 x}{x\,(1+\log x)}$, h) $\dfrac{3\sin x + 3}{\cos x + \sin 2x}$, i) $\dfrac{e^{-x}}{e^{2x} - 2e^x + 2}$,

j) $\cos x \log\left(1+\sin^2 x\right)$, l) $\dfrac{x \log x}{\sqrt{1-x^2}}$, m) $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}$,

n) $\cos^3 x$, o) $\cos^4 x$, p) $\dfrac{5x}{\sqrt{1+x^4}}$,

q) $\dfrac{1}{x^8+x^6}$, r) $x(\arctan x)^2$, s) $x \log \dfrac{1-x}{1+x}$,

t) $\sinh^2 x$, u) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

7. Mostre que, para $n \in \mathbb{N}_1$, é válida a seguinte fórmula de recorrência:

$$P(\log^n |x|) = x \log^n |x| - nP(\log^{n-1} |x|), \;\; x \neq 0.$$

Aproveite o resultado anterior para calcular todas as funções $F(x)$ tais que $F'(x) = \log^2 |x|$ e que verificam a condição $F(1) + F(-1) = 0$.

8. Utilizando o método de primitivação por partes, determine primitivas das funções $\sec^3 x$ e $\sec^4 x$. Mostre que para inteiros $n \geq 2$ é válida a expressão

$$P(\sec^n x) = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} P(\sec^{n-2} x).$$

9. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique as condições seguintes:

$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,, \;\; \lim_{x\to-\infty} \varphi'(x) = -1\,, \;\; \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

10. Determine a função $\psi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$\psi''(x) = \frac{1}{1+x}\,, \forall_{x>-1}, \;\; \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

11. Prove que a função de Heaviside *não é* primitivável em $\mathbb{R}$.
(Sugestão: argumente por redução ao absurdo).

12. Um corpo é lançado verticalmente para cima, com velocidade v_0 e a partir de uma posição situada a uma altura $h > 0$. Determine

    a) A posição do corpo em cada instante anterior ao embate no solo.
    b) A altura máxima que o corpo atinge e o tempo que demora a atingi-la.

13. Um projéctil pontual é lançado da superfície da Terra (suposta plana) com velocidade (escalar) v_0 e uma direcção que faz um ângulo α com a projecção horizontal, ficando apenas sujeito à acção da gravidade. Analizando separadamente os movimentos das projecções horizontal e vertical, determine

    a) A posição do corpo em cada instante anterior ao embate no solo.
    b) A altura máxima que o corpo atinge e o tempo que demora a atingi-la.
    c) O alcance do projéctil e o tempo gasto no percurso total.
    d) Para um dado valor fixo da velocidade inicial v_0 determine o ângulo de disparo α de modo ao alcance ser máximo.

Soluções

6.

a) $\frac{1}{2}x|x|$,

b) $\frac{x^2}{2}\arcsin\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(x^2-1)^{3/2}$,

c) $\frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2}-\frac{8}{15}(1+\sqrt{x})^{5/2}$,

d) $\frac{x}{2}\sin(\log x+1)-\frac{x}{2}\cos(\log x+1)$,

e) $\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2}-\frac{2}{7}(\sin x)^{7/2}$,

f) $\frac{2}{3}x^{3/2}\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\log(1+x)$,

g) $\log x-2\log|1+\log x|-\frac{2}{1+\log x}$,

h) $\log\left|\frac{1+2\sin x}{1-\sin x}\right|$,

i) $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{4}\log(e^{2x}-2e^{x}+2)$,

j) $\sin x\log(1+\sin^2 x)-2\sin x+2\arctan(\sin x)$,

l) $-\sqrt{1-x^2}\log x+\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right|$,

m) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{4}-4\log(\sqrt{x}+1)$,

n) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$, ,

o) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x$,

p) $\frac{5}{2}\log(x^2+\sqrt{1+x^4})$,

q) $-\frac{1}{5x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\arctan x$,

r) $\frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2-x\arctan x+\frac{1}{2}\log(1+x^2)$,

s) $\frac{1}{2}(x^2-1)\log\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$,

t) $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sinh 2x$,

u) $\frac{1}{12}\log\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$.

7. $\begin{cases} x\log^2|x|-2x\log|x|+2x+C, & \text{se } x>0 \\ x\log^2|x|-2x\log|x|+2x-C, & \text{se } x<0 \end{cases}$, onde C é uma constante real arbitrária.

9. $\log\left(1+e^{-x}\right)+\frac{\pi}{2}$.

10. $(1+x)\log(1+x)+1$.

12.

a) $x(t)=h+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$
b) Altura máxima: $h+\frac{v_0^2}{2g}$.Tempo que demora a atingi-la: $\frac{v_0}{g}$

13.

a) $x_{|}(t)=v_0(\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2,\ x_{-}(t)=x_0+v_0(\cos\alpha)t$
b) Altura máxima: $\frac{1}{2g}(v_0\sin\alpha)^2$.Tempo que demora a atingi-la: $\frac{v_0\sin\alpha}{g}$
c) Alcance do projéctil: $\frac{v_0}{g}\sin(2\alpha)$.Tempo gasto no percurso total: $\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$
d) $\frac{\pi}{4}$.