

ANÁLISE MATEMÁTICA II

11^a Ficha de Exercícios

(Eng.^a Electrotécnica e Gestão)

Derivação da função composta. Continuação

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas de 2^a. ordem contínuas tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(u, v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$. Mostre que $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.

13. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável em \mathbb{R}^3 , tal que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ em \mathbb{R}^3 . Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável em \mathbb{R}^2 , tal que

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = 0. \quad (1)$$

Determine as derivadas parciais de φ em função das derivadas parciais de F .

(Sugestão: derive ambos os membros de (1) em ordem a x e a y).

14. Mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais de 2^a ordem contínuas tal que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -\sin y, \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = e^x.$$

Fórmula de Taylor e Estudo de Funções

1. Para os campos escalares definidos em \mathbb{R}^2 pelas expressões seguintes, determine e classifique os seus extremos, indicando se são, ou não, globais e absolutos.

a) $f(x, y) = xy e^{x-y}$,

b) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$,

c) $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$,

d) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

2. Determine a fórmula de MacLaurin de segunda ordem da função $g(x, y) = e^x \sin y$.

3. Determine a fórmula de MacLaurin de segunda ordem da função $\varphi(x, y) = \cos x \cos y$.

4. Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem da função $\psi(x, y) = y^x$ numa vizinhança do ponto $(2, 1)$. Aproveite este resultado para calcular um valor aproximado de $(0,95)^{2,01}$.
5. Escreva a função polinomial $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ em potências de $x - 1$, $y - 1$ e $z - 1$.