Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

Exercícios de Auto-Avaliação
(Teorema da Função Inversa, Teorema da Função Implícita, Linhas e Superfícies, Multiplicadores de Lagrange)

1. Num ecossistema convivem quatro espécies animais com densidades populacionais determinadas pelas variáveis x, y, u, v. Determinou-se que estas variáveis estão relacionadas pelas equações:

$$\begin{cases} u &= 2\cos(\pi(x^2+y^2)) - x^2y \\ v &= 3\,\mathrm{sen}(\pi(x^2+y^2)) + 2xy^2 \end{cases} .$$

   Em regime normal as densidades populacionais assumem os valores $x = 1$, $y = 1$, $u = 1$, $v = 2$. Nas perguntas seguintes assume-se que o sistema está a funcionar suficientemente próximo do regime normal.

   a) Será possível determinar as densidades populacionais x, y medindo u, v ?

   b) Se a densidade populacional v aumentar um pouco as populações das espécies com densidades x e y aumentam, diminuem ou ficam aproximadamente constantes?

2. Repita as questões do problema anterior para o ecossistema determinado pelas equações

$$\begin{cases} 11e^{-2+x+u} - y^2v^2 - 10v = 0 \\ 5e^{-1+y} - 5e^{-1+x} + 10(u-1)v = 0, \end{cases}$$

   em torno do ponto $(1, 1, 1, 1)$.

3. Seja $F(x, y, z) = (x+y+z, x\cos(y^2+z^2)+z)$ e considere o sistema de equações $F(x, y, z) = 0$.

   a) Que pares de variáveis se devem escolher para se descreverem as soluções do sistema, numa vizinhança da origem, como funções da terceira variável ?

   b) Para essas escolhas, determine as derivadas das funções implícitas na origem.

4. Considere a função $f(x, y) = (x^2 - y^2\ ,\ 2xy)$.

   a) Mostre que f não é injectiva no seu domínio.

   b) Determine os pontos em torno dos quais a função f é injectiva.

   c) Calcule a derivada de f^{-1} no ponto $(-2, 0)$.

5. Calcule o espaço normal, o espaço tangente e as equações do plano tangente e da recta normal à superfície $z = x^4 + y^3$ no ponto $(1, 1, 2)$.

6. Calcule o espaço normal, o espaço tangente e as equações da recta tangente e do plano normal à linha descrita pelas equações $z = x^4 + y$ e $x + y + z = 6$ no ponto $(1, 2, 3)$.

7. Determine o ponto da intersecção do plano $x + z = 1$ com o parabolóide $z = x^2 + y^2$ que se encontra mais próximo da origem.

8. Mostre que a função $f(x, y) = xy - x$ tem extremos absolutos no conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1\},$$

   e determine-os.

9. Seja n um inteiro positivo. Escreva 1 como o produto de n números reais positivos cuja soma seja a menor possível.