

Análise Matemática II

Exercícios de Auto-Avaliação (Cálculo Integral)

1. Calcule os integrais seguintes:

a) $\int_0^2 \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} dx$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$

c) $\int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx$

d) $\int_0^1 \tan^3 x dx$

e) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$

f) $\int_1^2 x \ln x dx$

g) $\int_0^1 x^2 \sin x dx$.

2. Mostre que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos 2x dx = 0$.

3. Calcule a área da região limitada pela elipse de equação $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

4. Calcule o volume de cada uma das regiões seguintes:

a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$

b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; x + y \leq 1; x + y - z \leq 0\}$.

5. Calcule o comprimento do gráfico da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cosh x$.

6. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Prove que existe $c \in]a, b[$ tal que $\int_a^c f = \int_c^b f$.

7. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_a^b f = 0$. Prove que existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

8. Dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, considere a função

$$\Phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0.$$

Prove que se f for não negativa e crescente, então Φ também o será.

9. Resolva as equações seguintes:

a) $f(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt$

b) $f(x) = 1 - \int_0^x f(t) \sin t dt$.