

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 7 (a entregar na semana de 30/10/2006)

1. Calcule ou mostre que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 2y^4}{x^2 + y^2}$.
2. Considere a função $f(x, y) = x \log(xy)$.
 - (a) Indique, justificando, em que pontos é que a função f é contínua.
 - (b) Mostre que, sendo S uma recta que passa pela origem e contida no domínio D de f o limite de f na origem relativo ao conjunto S ,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S}} f(x, y),$$

existe e com o mesmo valor para toda as rectas nas condições indicadas.

- (c) Mostre que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$. (Sugestão: estude o limite relativo ao subconjunto de D formado pelos pontos que pertencem à linha de equação $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$).

Resolução

1. Se usarmos coordenadas polares em \mathbb{R}^2 obtemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 2y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta + 2r^4 \sin^4 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^3 \theta + 2r^2 \sin^4 \theta = 0.$$

Portanto o limite existe e o seu valor é 0.

2. (a) A função f é contínua no seu domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$, pois a função $g(x, y) = \log xy$ é contínua neste domínio por ser a composta de funções contínuas ($g = \psi \circ \varphi$ onde $\psi(u) = \log u$ e $\varphi(x, y) = xy$) e portanto $f(x, y) = xg(x, y)$ é contínua pois é o produto de funções contínuas.
 - (b) Consideremos as rectas que passam pela origem com declive m e que estão contidas no domínio D de f , ou seja, pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y = mx$, com $m > 0$. O limite de f relativo a estas rectas é dado por

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S}} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} x \log(x^2 m) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 m)}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2xm}{x^2 m}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -2x = 0. \end{aligned}$$

- (c) Temos

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=e^{-\frac{1}{x^2}}} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \log(xe^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x \rightarrow 0} x \log x + \lim_{x \rightarrow 0} x \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{1/x} + \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Logo este limite não existe e portanto o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ também não existe.