Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 5 (a entregar na semana de 16/10/2006)

1. Calcule (sem recorrer a uma calculadora) $e^{-0.1}$ com erro inferior a 10^{-4}.
2. Determine a série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{2-3x}$ em torno da origem e calcule o respectivo raio de convergência.
3. Estude os extremos e a concavidade da função
$$g(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt.$$
Esboce o gráfico de g.

Resolução

1. Sabemos que $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, onde $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^n$ é o polinómio de Taylor de ordem n no ponto a e $E_n(x)$ é o resto. Vamos usar a fórmula do resto de Lagrange para estimar o erro. Essa estimativa vai indicar-nos qual a ordem do polinómio de Taylor que devemos usar de modo a garantir que o erro seja inferior a 10^{-4}. Neste exemplo temos $f(x) = e^x$, $x = -0.1$ e $a = 0$.

   Assim obtemos,
$$|E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(-10^{-1})^{n+1} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!}10^{-(n+1)},$$
   com $c \in [-0.1, 0]$, logo $e^c < 1$. Portanto
$$|E_n(x)| < \frac{10^{-n-1}}{(n+1)!},$$
   e vemos que basta escolher $n = 3$. Logo
$$\begin{aligned} e^{-0.1} &\approx f(o) + f'(0)(-0.1) + \frac{f''(0)}{2}(-0.1)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(-0.1)^3 \\ &= 1 - 0.1 + 0.005 - \frac{0.001}{6}. \end{aligned}$$

2.
$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}x^n.$$
   O intervalo de convergência é dado pela condição $|\frac{3x}{2}| < 1$, ou seja, $|x| < \frac{2}{3}$.

3. Como a função integranda é contínua em $\mathbb{R}$, podemos aplicar o teorema Fundamental da Análise para concluir que g é diferenciável e $g'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Assim o único ponto de estacionaridade é $x = 0$. Para o classificar usamos a segunda derivada de g:

$$g''(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Temos $g''(0) = 1 > 0$ logo 0 é um ponto de mínimo. Analisando a segunda derivada podemos concluir também que $x = 1$ e $x = -1$ são pontos de inflexão de g, que a concavidade é voltada para cima no intervalo $]-1,1[$ e é voltada para baixo em $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Sendo $g(1) = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,dt = \ln\sqrt{2}$ um esboço do gráfico de g é dado na figura seguinte:

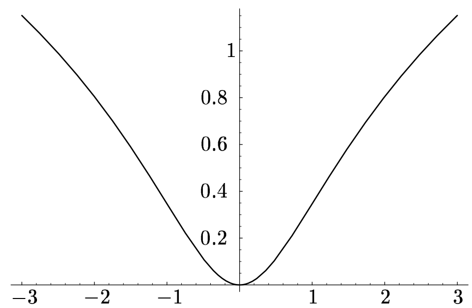

Figura 1: