Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 4 (a entregar na semana de 9/10/2006)

1. Calcule a área do conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < x\}$.
2. Calcule o comprimento da linha representada pelo gráfico da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x^2$.
3. Calcule o volume da pirâmide quadrangular com vértices nos pontos

$$(0,0,0)\,,\ (1,0,0)\,,\ (1,1,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (0,0,1).$$

Resolução

1. Dado que $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são as soluções da equação $x = x^2 - 1$, o conjunto será descrito por

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b\,;\, x^2 - 1 < y < x\}$$

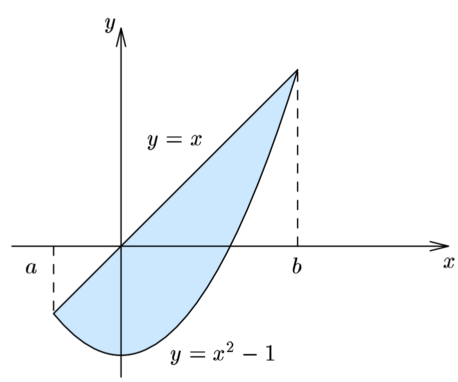

Figura 1:

tal como se representa na figura 1, e a respectiva área será dada pelo integral

$$\int_a^b (x - x^2 + 1)dx = \left[\frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) + (b - a)\right] = \sqrt{5}\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 1\right] = \frac{5\sqrt{5}}{6}.$$

2. Seja L o comprimento da linha. Sendo f uma função par, temos,

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx,$$

ou seja

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx.$$

Efectuando a substituição $x = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(t)$ e, tendo em conta que $\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$ e $\operatorname{senh}(t) + \cosh(t) = e^t$, teremos

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx \\
&= \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \cosh^2(t)\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \left(e^t + e^{-t}\right)^2\,dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} 2e^{2t}\,dt - \frac{1}{8}\int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (-2)e^{-2t}\,dt + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) \\
&= \frac{1}{8}\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{8\left(2+\sqrt{5}\right)^2} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

3. A pirâmide encontra-se representada na figura 2 e o seu volume será dado pelo integral $\int_0^1 f(z)dz$ em que $f(z)$ é a área do quadrado que se encontra à altura z.
Da figura, é claro que $f(z) = (1-z)^2$ e, portanto o volume da pirâmide será

$$\int_0^1 (1-z)^2 dz = \frac{1}{3}.$$

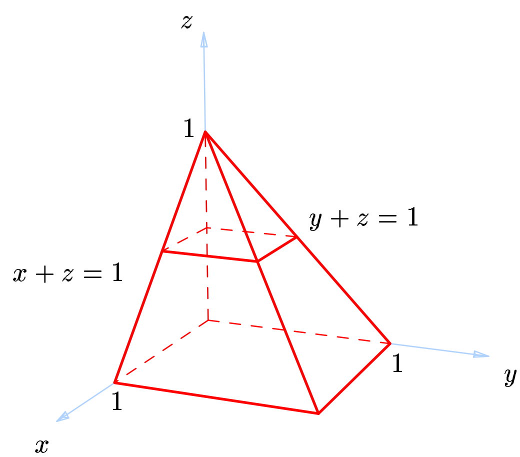

Figura 2: