Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 3 (a entregar na semana de 2/10/2006)

1. Calcule o integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{3\sin x + 3}{\cos x + \sin 2x}\, dx$.

2. Uma partícula move-se ao longo do eixo dos x. A sua posição é dada no instante t pela função

$$f(t) = \int_0^{t^2} \frac{1 + \sin(\pi x)\cos(\pi x)}{1 + x^2}\, dx, \quad 0 \le t \le 1.$$

Calcule a velocidade da partícula no instante $t = 1$.

Resolução

1. Temos

$$\int_0^{\pi/4} \frac{3\sin x + 3}{\cos x + \sin 2x}\, dx = 3\int_0^{\pi/4} \frac{1\sin x + 1}{\cos x(1 + 2\sin x)}\, dx.$$

Fazendo a substituição $t = \sin x$ obtemos

$$3\int_0^{\pi/4} \frac{1\sin x + 1}{\cos x(1 + 2\sin x)}\, dx = 3\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}(1+2t)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{3}{(1-t)(1+2t)}\, dt.$$

A função racional racional $\dfrac{3}{(1-t)(1+2t)}$ decompõe-se na seguinte soma de fracções mais simples

$$\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+2t},$$

onde os coeficientes A e B devem verificar a igualdade $A(1+2t) + B(1-t) = 3$, logo conclui-se que $A = 1$ e $B = 2$. Assim, o valor do integral é dado por

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{3}{(1-t)(1+2t)}\, dt &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-t}\, dt + \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{2}{1+2t}\, dt \\
&= \left[-\log|1-t| + \log|1+2t|\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \left[\log\left|\frac{1+2t}{1-t}\right|\right]_0^{\sqrt{2}/2} \\
&= \log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right).
\end{aligned}$$

2. A velocidade da partícula em cada instante é dada pela derivada da função f. Como a função integranda é contínua, pelo Teorema Fundamental da Análise obtemos

$$f'(t) = \frac{1 + \sin(\pi t^2)\cos(\pi t^2)}{1 + t^4} 2t,$$

donde se conclui que no instante $t = 1$ temos $f'(1) = 1\, m/s$.