Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 13 (a entregar na semana de 11/12/2006)

1. Considere conjunto
$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{xy} + \log(z + x) = 1\}.$$
   (a) Prove que existe uma vizinhança $U \in \mathbb{R}^3$ do ponto $(0, 1, 1)$, uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ do ponto $(1, 1)$ e uma função $f : V \to \mathbb{R}$ tal que
$$L \cap U = \{(f(y, z), y, z) : (y, z) \in V\}.$$
   (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1)$.

2. Considere a função definida por
$$f(x, y) = (x\ ,\ \cos(x + y))$$
   (a) Determine os pontos em que f é localmente invertível.
   (b) Sabendo que $f(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 0)$, determine a derivada de f^{-1} no ponto $(0, 0)$.

3. Considere o seguinte conjunto
$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = 2 - x^2 - y^2\ ;\ z - y = 0\right\}.$$
Determine, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, o ponto (ou os pontos) de C que está a maior distância da origem. Diga, justificando, se esse ponto tem de existir.

Resolução

1. (a) Seja $F(x, y, z) = e^{xy} + \log(z + x) - 1$. Note-se que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $F(0, 1, 1) = 0$. Para além disso temos
$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 1) = 2 \neq 0$$
Portanto, pelo teorema da função implícita existe uma vizinhança do ponto $(0, 1, 1)$ em que x se pode exprimir como função de y, z para os pontos em que $F(x, y, z) = 0$.

   (b) Fazendo $x = f(y, z)$ e derivando a equação $F(f(y, z), y, z) = 0$ em ordem a z obtemos
$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1, 1)\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1) + \frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 1) = 0$$
e, portanto
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1) = -\frac{1}{2}$$

2. (a) Note-se que f é de classe C^1. Pelo teorema da função inversa, f é localmente invertível nos pontos em que a derivada de f é representada por uma matriz não singular. A derivada de f é dada por

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen}(x+y) \end{bmatrix}$$

Assim, f será localmente invertível nos pontos que verificarem a desigualdade

$$\det Df(x,y) = -\operatorname{sen}(x+y) \neq 0$$

ou seja, no conjunto dado por

$$\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) : \; x+y = k\pi\}$$

No conjunto de pontos em que $\operatorname{sen}(x+y) = 0$, ou seja, no conjunto

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x+y = k\pi\}$$

o teorema da função inversa nada garante. Neste conjunto de pontos deveremos analisar directamente a função f quanto à sua injectividade.

Da igualdade $f(x,y) = f(u,v)$, obtemos,

$$u = x \; ; \; v = y + 2k\pi \; , k \in \mathbb{Z}$$

Assim, dois pontos terão a mesma imagem através de f se a diferença entre as respectivas ordenadas for $2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, para cada ponto existe uma vizinhança em que f é injectiva.

Note-se que esta análise é válida em $\mathbb{R}^2$ e, portanto, poderíamos não ter usado o teorema da função inversa para determinar a invertibilidade local de f.

(b) Sendo $f(0, \frac{\pi}{2}) = (0,0)$, temos

$$Df^{-1}(0,0) = \left[Df(0, \frac{\pi}{2})\right]^{-1}$$

Portanto,

$$Df^{-1}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. O conjunto C é fechado porque é o conjunto de nível de uma função contínua. Por outro lado as coordenadas x e y dos pontos da curva satisfazem a equação

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

pelo que satisfazem também as seguintes desigualdades óbvias,

$$|x| \leq \frac{3}{2} \; ; \; |z| = |y| \leq 2,$$

que mostram que C é limitado. Assim, a variedade C é compacta pelo que qualquer função contínua tem em C (pelo menos) um mínimo e um máximo (diferentes caso a função não seja constante). Interessa-nos a restrição a C da função contínua f, correspondente ao quadrado da distância à origem, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (esta função tem os mesmos extremos condicionados que a função distância e é significativamente mais simples).

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, consideramos a função escalar g em $\mathbb{R}^5$ dada por

$$g(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 + z - 2\right) + \mu\,(z - y)\,.$$

As equações para os pontos de estacionaridade (condições necessárias de extremos) desta função são

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z - 2 & = & 0 \\ z & = & y \\ 2x + 2x\lambda & = & 0 \;\Leftrightarrow\; 2x(1+\lambda) = 0 \\ 2y + 2y\lambda - \mu & = & 0 \;\Leftrightarrow\; 2y(1+\lambda) - \mu = 0 \\ 2z + \lambda + \mu & = & 0. \end{array}\right.$$

Temos que $x = 0$ ou $\lambda = -1$.

Se $x = 0$ obtemos, das equações que definem C, o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} z + y^2 - 2 & = & 0 \\ z & = & y \end{array}\right.$$

e portanto

$$y^2 + y - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 1 \text{ ou } y = -2$$

ou seja obtemos os dois pontos de C, $P_1 = (0, 1, 1)$ e $P_2 = (0, -2, -2)$.

Se $\lambda = -1$ então $\mu = 0$, $z = y = 1/2$ e $x = \pm\sqrt{5}/2$. Obtemos os dois pontos $P_3 = (\sqrt{5}/2, 1/2, 1/2)$ e $P_4 = (-\sqrt{5}/2, 1/2, 1/2)$.

Os valores de f nos quatro pontos são $f(P_1) = 2$, $f(P_2) = 8$ e $f(P_3) = f(P_4) = 7/4$ pelo que o ponto de C a maior distância da origem é $P_2 = (0, -2, -2)$. A distância deste ponto à origem é $d = \sqrt{f(P_2)} = 2\sqrt{2}$.