

## Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

### Exercício-Teste 12 (a entregar na semana de 04/12/2006)

1. Considere a função  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$ .
  - a) Determine os pontos de estacionaridade de  $f$  e classifique-os.
  - b) Mostre que a função  $f$  tem máximo e mínimo absolutos no conjunto definido por  $x^2 + y^2 \leq 2$ , e determine-os.
2. Mostre que a equação  $x + e^{y^2+xz^2} = 1$  define  $x$  como função de  $y$  e de  $z$  em alguma vizinhança do ponto  $(0, 0, 1)$ . Calcule as derivadas parciais  $\frac{\partial x}{\partial y}(0, 1)$  e  $\frac{\partial x}{\partial z}(0, 1)$ .

### Resolução

1. a) Dado que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \end{cases}$$

os pontos de estacionaridade são dados pelas soluções das equações

$$\begin{cases} x(2 + 3x) = 0 \\ 2y = 0, \end{cases}$$

ou seja, são os pontos  $(0, 0)$  e  $(-\frac{2}{3}, 0)$ .

Para os classificar devemos analisar a matriz das derivadas parciais de  $f$  de ordem dois (matriz Hessiana de  $f$ ,  $H(x, y)$ ). Sendo

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

temos

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H(-\frac{2}{3}, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim  $H(0, 0)$  é definida positiva e, portanto,  $(0, 0)$  é um ponto de mínimo de  $f$ . A matriz  $H(-\frac{2}{3}, 0)$  é indefinida e, portanto,  $(-\frac{2}{3}, 0)$  não é extremo de  $f$ .

- b) O conjunto  $D$  definido pela equação  $x^2 + y^2 \leq 2$  é limitado e fechado, ou seja, compacto e, sendo  $f$  uma função contínua, pelo Teorema de Weierstrass concluímos que  $f$  tem máximo e mínimo absolutos em  $D$ .

Note-se que a origem  $(0, 0)$  é um ponto do interior do conjunto  $D$  e  $f(0, 0) = 0$ .

Na fronteira do conjunto  $D$ , ou seja para  $x^2 + y^2 = 2$ , temos  $f(x, y) = 2 + x^3$ .

Sabendo que  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ , na fronteira de  $D$  teremos

$$2 - 2\sqrt{2} = f(-\sqrt{2}, 0) \leq f(x, y) \leq f(\sqrt{2}, 0) \leq 2 + 2\sqrt{2}.$$

Assim, concluímos que  $(-\sqrt{2}, 0)$  é o mínimo absoluto de  $f$  em  $D$  e  $(\sqrt{2}, 0)$  é o ponto de máximo absoluto de  $f$  em  $D$ .

2. Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função de classe  $C^1$  definida por  $F(x, y, z) = x + e^{y^2+xz^2} - 1$ .

Note-se que  $F(0, 0, 1) = 0$  e  $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, 1) = 1 + z^2 e^{y^2+xz^2} \Big|_{(0,0,1)} = 2 \neq 0$ .

Pelo Teorema da Função Implícita, concluímos que a equação  $x + e^{y^2+xz^2} = 1$  define  $x$  como função de  $y$  e de  $z$  em alguma vizinhança do ponto  $(0, 0, 1)$ , ou seja, nessa vizinhança temos

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = x(y, z)$$

e, portanto

$$F(x(y, z), y, z) = 0.$$

Derivando em ordem a  $y$  e a  $z$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, 1) \frac{\partial x}{\partial y}(0, 1) + \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 1) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, 1) \frac{\partial x}{\partial z}(0, 1) + \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 1) &= 2ye^{y^2+xz^2} \Big|_{(0,0,1)} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) &= 2xz e^{y^2+xz^2} \Big|_{(0,0,1)} = 0, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial y}(0, 1) &= -\frac{0}{2} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial z}(0, 1) &= -\frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$