Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 11 (a entregar na semana de 27/11/2006)

1. Determine a recta normal e o plano tangente ao cone
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$
no ponto $(3, 4, -2)$.

2. Encontre e classifique os pontos de estacionaridade da função $f(x, y) = ye^{1-y^2-x^2}$.

Resolução

1. Consideramos a função $F(x, y, z) = z + \sqrt{x^2 + y^2}$. Vemos que $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 3\}$ logo C é uma superfície de nível de F. Logo, em cada ponto, o gradiente de F dá-nos a direcção normal ao cone nesse ponto. Assim temos
$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right)$$
e $\nabla F(3, 4, -2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$. Portanto a recta normal a C no ponto $(3, 4, -2)$ é dada por
$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (3, 4, -2) + \lambda\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right), t \in \mathbb{R}\right\},$$
donde se conclui que as equações cartesianas que definem a recta são $3z - 5x + 21 = 0$ e $4x = 3y$.
O plano tangente é dado pela equação
$$\frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4) + (z + 2) = 0 \iff 3x + 4y + 5z = 15.$$

2. Os pontos de estacionaridade são os pontos que verificam
$$\nabla f(x, y) = (-2xye^{1-y^2-x^2}, (1 - 2y^2)e^{1-y^2-x^2}) = (0, 0),$$
ou seja,
$$\left\{\begin{array}{c} 2xy = 0 \\ 1 - 2y^2 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = 0 \;\vee\; y = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. .$$
Assim, os pontos de estacionaridade são $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
A matriz Hessiana de f é dada por
$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2y(2x^2 - 1)e^{1-y^2-x^2} & 2x(2y^2 - 1)e^{1-y^2-x^2} \\ 2x(2y^2 - 1)e^{1-y^2-x^2} & 2y(2y^2 - 3)e^{1-y^2-x^2} \end{bmatrix}.$$
Nos pontos de estacionaridade obtemos
$$H\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{bmatrix} \mp\sqrt{2e} & 0 \\ 0 & \mp 2\sqrt{2e} \end{bmatrix},$$
donde podemos concluir que $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ é um ponto de máximo local e $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ é um ponto de mínimo local. O valor do máximo é $f(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2e}}{2}$ e o valor do mínimo é $f(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2e}}{2}$.