**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

## Exercício-Teste 10 (a entregar na semana de 20/11/2006)

Considere a função $f(x, y, z) = e^x yz$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe $C^1$ tal que $g(0, 0) = (0, 1, 2)$ e

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada direccional $D_v(f \circ g)(0, 0)$ em que $\vec{v} = (1, 2)$.

## Resolução

Pelo Teorema da Função Composta temos

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(0,0) &= Df(g(0,0)Dg(0,0) \\ &= Df(0,1,2)Dg(0,0) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,2) & \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x yz\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x z\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = e^x y$, então

$$D(f \circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix}.$$

Sendo $\|v\| = \sqrt{5}$, obtemos

$$\begin{aligned} D_v(f \circ g)(0,0) &= D(f \circ g)(0,0)\frac{v}{\|v\|} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{8+26}{\sqrt{5}} = \frac{34\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$