Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º semestre de 2006/2007

Exercício-Teste 1 (a entregar na semana de 18/09/2006)

Calcule todas as primitivas das seguintes funções:

1. $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt[3]{x}}{3}$
2. $\dfrac{1}{1+3x^2}$
3. $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$
4. $\arctan x$

Resolução

1.

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt[3]{x}}{3}\,dx \;=\; 2\int x^{-1/2}\,dx + \frac{1}{3}\int x^{4/3}\,dx = 4x^{1/2} + \frac{1}{7}x^{7/3} + C = 4\sqrt{x} + \frac{1}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.

$$\int \frac{1}{1+3x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}x)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Fazendo a substituição $t = e^{2x}$ temos $x = \frac{1}{2}\ln t$ e portanto obtemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\,dx &= \int \frac{t^2}{t+1}\frac{1}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{t}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{t+1}\,dt \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln(t+1) + C = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. Usando o método de primitivação por partes com $u'(x) = 1$ e $v(x) = \arctan x$ obtemos

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$