Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

2º Teste - 16 de Dezembro de 2006 - 9h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Seja F uma função real definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estude F quanto à continuidade no ponto $(0,0)$.

(3 val.) 2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (\operatorname{sen}(xy^2), e^y, \log(1+x^2))$ e seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$Dg(0,e,0) = [\ e \ \ -1 \ \ e\ ].$$

Calcule a derivada direccional da função $g \circ f$ no ponto $(0,1)$ na direcção do vector $v = (1,-1)$.

(2 val.) 3. Determine a recta tangente à linha $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2+1 = y^2+x^2 \ ; \ z = y+2\}$ no ponto $(1,-1,1)$.

4. Considere a função $h(x,y) = x^2 - y^2 + x^3$.

(2,5 val.) (a) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de h na região $x^2+y^2 < 1$.

(2,5 val.) (b) Justifique que h tem extremos absolutos na região $x^2+y^2 \leq 1$ e determine-os.

5. Considere o sistema

$$\begin{cases} z + \log(y^2 + x^2 z) = 1 \\ y - x = 1. \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que este sistema define y e z como funções de x em torno do ponto $(0,1,1)$.

(3 val.) (b) Calcule as derivadas $\frac{dy}{dx}(0)$ e $\frac{dz}{dx}(0)$.

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k (isto é, f tem derivadas parciais contínuas até ordem k). Assumindo que $f(0) = 0$ e todas as derivadas parciais de f de ordem menor ou igual a $k-1$ se anulam na origem, mostre que

$$\underset{C>0}{\exists} \ \underset{x \in B_1(0)}{\forall} \ \|f(x)\| \leq C\|x\|^k.$$

Resolução indicativa

1. Fazendo $y = x^2$, temos $F(x,y) = F(x,x^2) = \dfrac{1}{2x}$ e, portanto, o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ não existe. Dado que $F(0,0) = 0$ concluímos que F não é contínua na origem.

2.

$$\begin{aligned}
D_v(g\circ f)(0,1) &= Dg(f(0,1))Df(0,1)\frac{v}{\| v \|}\\
&= Dg(0,e,0)Df(0,1)\frac{v}{\| v \|}\\
&= \begin{bmatrix} e & -1 & e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\
&= \sqrt{2}e
\end{aligned}$$

3. A recta tangente pode ser definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases}(x-1,y+1,z-1)\cdot(-2,2,2)=0\\ (x-1,y+1,z-1)\cdot(0,-1,1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+y-x+1=0\\ z=y+2\end{cases}$$

4. (a) Fazendo $\nabla h(x,y) = 0$ obtemos os pontos de estacionaridade $(0,0)$ e $(-\frac{2}{3},0)$. Analisando as matrizes Hessianas de h nestes pontos,

$$H(0,0) = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\ ,\quad H(-\frac{2}{3},0) = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},$$

concluímos que $(0,0)$ é um ponto de sela e $(-\frac{2}{3},0)$ é um ponto de máximo de h.

(b) Seja $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$. Sendo h uma função contínua e D um comjunto compacto, pelo Teorema de Weierstrass, h tem máximo e mínimo em D. Da alínea anterior, a função h tem apenas um extremo no interior de D. Os extremos de h na fronteira de D, ou seja, no conjunto definido pela equação $x^2+y^2=1$, podem ser determinados recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange.
Assim, definindo $H(x,y) = x^2+y^2-1$, teremos

$$\begin{cases} D(h+\lambda H)(x,y) = 0\\ H(x,y) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3x^2+2\lambda x = 0\\ y(\lambda-1) = 0\\ x^2+y^2 = 1.\end{cases}$$

As soluções deste sistema são os pontos

$$(-1,0)\ ,\ (1,0)\ ,\ (0,-1)\ ,\ (0,1),$$

ou seja, os extremos da função h em D são os pontos

$$(-1,0)\ ,\ (1,0)\ ,\ (0,-1)\ ,\ (0,1)\ ,\ (-\frac{2}{3},0).$$

Calculando os valores de h em cada um destes pontos, concluímos que h atinge o máximo no ponto $(1,0)$ e o mínimo nos pontos $(0,-1)$ e $(0,1)$.

5. (a) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função de classe C^1 definida por

$$F(x, y, z) = (z + \log(y^2 + x^2 z) - 1, y - x - 1).$$

Note-se que $F(0, 1, 1) = (0, 0)$ e que

$$DF(0, 1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\det D_{y,z}F(0, 1, 1) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

e, pelo Teorema da Função Implícita, o sistema dado define y e z como funções de classe C^1 de x em alguma vizinhança do ponto $(0, 1, 1)$.

(b) Da alínea anterior, fazendo $y = y(x)$ e $z = z(x)$ e derivando a função $F(x, y(x), z(x))$ em $x = 0$, obtemos

$$\begin{cases} 2\frac{dy}{dx}(0) + \frac{dz}{dx}(0) = 0 \\ \frac{dy}{dx}(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dz}{dx}(0) = -2 \\ \frac{dy}{dx}(0) = 1 \end{cases}$$

6. Para cada uma das funções componentes $f_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}\, , j = 1, \ldots n$, pela fórmula de Taylor, existem pontos $a_j\, , j = 1, \ldots n$, no segmento de recta com extremos na origem e no ponto $x \in B_1(0)$ e constantes $A_j > 0\, , j = 1, \ldots n$, tais que

$$\begin{aligned} |f_j(x)| &= |\frac{1}{k!} D^k f_j(a_j) x^j| \\ &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{k} \cdots \sum_{i_k=1}^{k} |\frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}(a_j)||x_{i_1}||x_{i_2}| \ldots |x_{i_k}| \\ &\leq A_j \|x\|. \end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|f(x)\| \leq \sum_{j=1}^{k} |f_j(x)| \leq C\|x\|.$$