Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

2º Teste - 16 de Dezembro - 9h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Seja F uma função real definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estude F quanto à continuidade no ponto $(0,0)$.

(3 val.) 2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (\operatorname{sen}(xy^2), e^y, \log(1+x^2))$ e seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$Dg(0,e,0) = [\ e \ \ -1 \ \ e\ ].$$

Calcule a derivada direccional da função $g \circ f$ no ponto $(0,1)$ na direcção do vector $v = (1,-1)$.

(2 val.) 3. Determine a recta tangente à linha $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2+1 = y^2+x^2 \ ; \ z = y+2\}$ no ponto $(1,-1,1)$.

4. Considere a função $h(x,y) = x^2 - y^2 + x^3$.

(2,5 val.) (a) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de h na região $x^2+y^2 < 1$.

(2,5 val.) (b) Justifique que h tem extremos absolutos na região $x^2+y^2 \leq 1$ e determine-os.

5. Considere o sistema

$$\begin{cases} z + \log(y^2 + x^2 z) = 1 \\ y - x = 1. \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que este sistema define y e z como funções de x em torno do ponto $(0,1,1)$.

(3 val.) (b) Calcule as derivadas $\frac{dy}{dx}(0)$ e $\frac{dz}{dx}(0)$.

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k (isto é, f tem derivadas parciais contínuas até ordem k). Assumindo que $f(0) = 0$ e todas as derivadas parciais de f de ordem menor ou igual a $k-1$ se anulam na origem, mostre que

$$\underset{C>0}{\exists} \ \underset{x \in B_1(0)}{\forall} \quad \|f(x)\| \leq C\|x\|^k.$$