Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º Teste - 28 de Outubro de 2006 - 9h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

(2 val.) (b) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,dx$

(2 val.) (c) $\displaystyle\int_{\ln\frac{3}{4}}^{\ln\frac{15}{16}} \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\,dx.$

(2 val.) 2. Seja $R \in \mathbb{R}^2$ a região do 1º quadrante limitada pelas rectas $y = 4 - x$, $y = x$ e $y = 3x$. Esboce a região R e calcule a sua área.

(1 val.) 3. Calcule o comprimento do arco da curva de equação $y = \cosh x$ compreendido entre os pontos de abcissas 0 e 1.

(2 val.) 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Mostre que a função $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$ tem um extremo local em $x = 0$ e classifique-o.

(3 val.) 5. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$. Escreva a série de Taylor de f em torno da origem e determine as derivadas $f^{(7)}(0)$ e $f^{(8)}(0)$.

(2 val.) 6. Calcule $\log(1.1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

(2 val.) 7. Considere a função $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)(x^2+y^2)}}$. Determine o interior e a fronteira do domínio de g e indique se é aberto ou fechado.

(3 val.) 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Mostre que, para qualquer inteiro $n > 0$,

$$\int_0^{n-1} f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n-1} f(i) \le \int_1^n f(x)\,dx.$$