Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

Teste de Recuperação 1 - 5 de Janeiro de 2007 - 9h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule os integrais seguintes:

(1,5 val.) (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

(1,5 val.) (b) $\displaystyle\int_1^2 x^5 \log x\,dx.$

(2 val.) (c) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$. Use a substituição $x=\frac{1}{\cos t}$.

(2 val.) 2. A curva $y=\frac{4x^3}{27}$ intersecta a circunferência $x^2+y^2=25$ nos pontos $(3,4)$ e $(-3,-4)$, dividindo o disco $x^2+y^2\leq 25$ em duas regiões com áreas iguais. Escreva um integral que permita calcular essa área.

(2 val.) 3. Seja $f(x)=\int_0^x \sqrt{e^{2t}-1}\,dt$, com $x\geq 0$. Calcule o comprimento do gráfico de f no intervalo $[0,1]$.

4. Seja $g(x)=\frac{3}{(x-1)(x+2)}$.

(2 val.) (a) Calcule o desenvolvimento em série de Taylor de g no ponto $x=0$. Sugestão: decomponha g em fracções simples.

(1 val.) (b) Calcule $g^{(10)}(0)$.

(2 val.) 5. Use a fórmula da Taylor para calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-e^{-2x^2}}{x^4}$.

6. Considere a função $f(x,y)=\sqrt{\frac{x}{x+y}}$.

(1,5 val.) (a) Determine o domínio D de f e faça um esboço de D.

(1,5 val.) (b) Determine o interior e a fronteira de D e indique se é aberto ou fechado.

(3 val.) 7. Seja h uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ e $H:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida por $H(x)=\int_{1/x}^{1/x^2} h(tx)\,dt$. Justifique que H é diferenciável e mostre que

$$H'(x)=-\frac{1}{x}\left(H(x)+\frac{1}{x^2}h\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Teste de Recuperação 2 - 5 de Janeiro de 2007 - 9h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

(3 val.) 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Mostre que f é prolongável por continuidade à origem e sendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o seu prolongamento determine $F(0,0)$.

(3 val.) 2. Sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável,

$$h(x,y,z) = g(x^2 - y^2, y^2 - z^2), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e sabendo que $\nabla g(0,0) = (1,1)$ determine $\nabla h(1,1,1)$.

(3 val.) 3. Determine o plano tangente à superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{x+y^2}\}$ no ponto $(0,0,1)$.

4. Considere a equação

$$x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z + z = 0.$$

(2 val.) (a) Mostre que esta equação define z como função de x e de y, ou seja, $z = f(x,y)$ em alguma vizinhança do ponto $(0, \pi, 0)$.

(3 val.) (b) Mostre que $(0, \pi)$ é um ponto de estacionaridade de f e classifique-o.

(3 val.) 5. Determine o ponto da linha $y^2 - x^2 + 2x + 3 = 0$ mais próximo da origem, usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

(3 val.) 6. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $\nabla F(x) = 0$ para todo o $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que F é constante em $B_1(0)$.