Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

LEFT e LMAC
Exame de Recuperação - 23 de Janeiro de 2025 - 8h
Duração: 2 horas
Nota do Exame = soma das notas dos Testes/3

Resolução abreviada

Grupo I – Teste 1 – 40 minutos

1. Seja α um parâmetro real e considere o sistema linear cuja a matriz aumentada é dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ \alpha & -\alpha^3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & \alpha & -2\alpha \\ -2 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right]$$

(a) (3 val.) Determine em função de α quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.

Resolução: Aplicando o método de eliminação de Gauss obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ \alpha & -\alpha^3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & \alpha & -2\alpha \\ -2 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & \alpha-\alpha^3 & \alpha+1 & -2\alpha-2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & -2\alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donde concluimos que o sistema é possível e indeterminado se $\alpha = -1, 0, 1$ e possível determinado caso contrário. Nunca é impossível.

(b) (1 val.) Para $\alpha = -1$, calcule a característica e a dimensão do núcleo de A.

Resolução: Para $\alpha = -1$ a característica é 1 e $\dim N(A) = 3$, pois a matriz tem 4 colunas e tem apenas 1 pivot (uma linha não nula após a eliminação de Gauss).

(c) (2 val.) Para $\alpha = 0$, determine o conjunto de soluções do sistema.

Resolução: Para $\alpha = 0$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} -x+y+z=-2 \\ z=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ z=-2 \end{cases}.$$

Logo, o conjunto solução é dado por

$$\{(x,x,-2) : x \in \mathbb{R}\}.$$

(d) (3 val.) Para $\alpha = 1$, determine equações cartesianas que descrevem o espaço das linhas de A.

Resolução: Para $\alpha = 1$ o espaço das linhas é dado por

$$\begin{aligned} EL(A) &= L(\{(-1,1,1,-2),(0,0,1,-2)\}) = \\ &= \{(x,y,z,w) = \alpha(-1,1,1,-2)+\beta(0,0,1,-2);\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z,w) = (\alpha,\alpha,\alpha+\beta,-2\alpha-2\beta);\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+y=0,\ 2z+w=0\}. \end{aligned}$$

2. (3 val.) Determine a matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que satisfaz a equação matricial

$$\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&3\\3&2\end{bmatrix}A\right)^T\begin{bmatrix}4&3\\3&2\end{bmatrix}^7=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\3&2\end{bmatrix}^8.$$

Resolução: Sejam $B=\begin{bmatrix}4&3\\3&2\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$. Note-se que B é invertível e $B=B^T$. Assim temos

$$\begin{aligned} &(I+BA)^TB^7 = CB^8 \iff (I+BA)^T = CB \iff I+BA=(CB)^T \iff \\ &I+BA = B^TC^T \iff BA = BC^T - I \iff A = B^{-1}BC^T - B^{-1} \iff \\ &A = C^T - B^{-1} \iff A = \begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2&3\\3&-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&0\\-1&8\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. (3 val.) Seja $A=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&0&b\\2&3&c\end{bmatrix}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível. Determine, justificando, a 1ª coluna da matriz A^{-1}.

Resolução: Para determinar a primeira coluna da inversa de A^{-1} temos de resolver o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&a&1\\0&0&b&0\\2&3&c&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&a&1\\0&3&c-2a&-2\\0&0&b&0\end{array}\right].$$

Uma vez que A é invertível sabemos que $b\neq 0$. Logo obtemos

$$z=0,\ x=1 \text{ e } y=-\frac{2}{3}.$$

Portanto a 1ª coluna de A^{-1} é dada por $\begin{bmatrix}1\\-\frac{2}{3}\\0\end{bmatrix}$.

4. (3 val.) Seja V o espaço vetorial dos polinómios reais de grau ≤ 3 e considere os subespaços de V definidos por

$$U = L\left(\left\{t^2-t, 1+t-t^2+t^3\right\}\right) \text{ e } W=\left\{a+bt+ct^2+dt^3\in V : a-c=0\right\}.$$

Determine $p(t)\in V$ tal que $U\cap W = L(\{p(t)\})$.

Resolução: Temos

$$\begin{aligned} U &= \{p(t)\in V : p(t)=\alpha(t^2-t)+\beta(1+t-t^2+t^3),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \\ &= \{p(t)\in V : p(t) = \alpha+(\beta-\alpha)t+(\alpha-\beta)t^2+\alpha t^3,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \\ &= \{p(t)=a+bt+ct^2+dt^3\in V:\ a=d,\ b=-c\}. \end{aligned}$$

Logo obtemos

$$\begin{aligned} U\cap W &= \{p(t)=a+bt+ct^2+dt^3\in V:\ a=d,\ b+c=0,\ a=c\} \\ &= \{p(t)=c-ct+ct^2+ct^3, c\in\mathbb{R}\} \\ &= L(\{1-t+t^2+t^3\}). \end{aligned}$$

5. (2 val.) Sejam $A_1, \ldots, A_m \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Suponha que existe $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_1 x = \ldots = A_m x = 0$. Mostre que $\{A_1, \ldots, A_m\}$ não é um conjunto gerador para $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Resolução: Se $\{A_1, \ldots, A_m\}$ for um conjunto gerador então a matriz identidade $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ pode-se escrever como combinação linear destas matrizes, ou seja, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_m A_m = I.$$

Nesse caso temos

$$0 = \alpha_1 A_1 x + \ldots + \alpha_m A_m x = Ix = x \neq 0,$$

o que é claramente impossível.

Grupo II – Teste 2 – 40 minutos

1. Seja V o espaço dos polinómios reais de grau ≤ 2 e $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to V$ a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right) = 1, \quad T\left(\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 1\end{bmatrix}\right) = 1 - t, \quad T\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}\right) = t^2 - 1, \quad T\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = 1 + t.$$

Considere a transformação linear $S : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$S(a + bt + ct^2) = a + b + c.$$

(a) (2 val.) Determine a matriz que representa a transformação linear T em relação à base

$$B = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right) \text{ de } M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ e à base } B' = (1, t, t^2) \text{ de } V.$$

Resolução: A matriz que representa T tem como colunas as componentes na base B' das imagens dos elementos da base B, logo

$$A_{T,B,B'} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\0 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

(b) (3 val.) Determine uma base para o núcleo de T e diga, justificadamente, se T é sobrejectiva.

Resolução: Seja $A = A_{T,B,B'}$. Começamos por calcular o núcleo de A. As equações cartesianas que definem o núcleo são

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0\\ -y + w = 0\\ z = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y\\ w = y\\ z = 0\end{cases}$$

portanto $N(A) = \{y(-2, 1, 0, 1) : y \in \mathbb{R}\}$. O vetor $(-2, 1, 0, 1)$ é uma base para o núcleo de A, logo uma base para o núcleo de T é dada por

$$B_{N(T)} = \left\{ -2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right\} = \left\{ \begin{bmatrix}-1 & -2\\-1 & 2\end{bmatrix}\right\}.$$

Usando o Teorema da Característica- Nulidade

$$\dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4,$$

donde concluimos que $\dim \mathrm{Im}(T) = 3 = \dim V$, logo T é sobrejectiva.

(c) (3 val.) Determine a matriz que representa $S \circ T$ em relação à base B de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e a base canónica $B_c = \{1\}$ de $\mathbb{R}$.

Resolução: Começamos por determinar a matriz que representa S com respeito às bases B' e B_c,

$$A_{S,B',B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz que representa a composta é dada por

$$A_{S\circ T,B,B_c} = A_{S,B',B_c}\, A_{T,B,B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) (3 val.) Resolva em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a equação linear $(S \circ T)(A) = 3$.

Resolução: Usando a alínea anterior, em coordenadas, temos de resolver a equação

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right],$$

que tem soluções dadas por

$$\{(3 - 2w, y, z, w) = (3, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + w(-2, 0, 0, 1) :\ y, z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Logo o conjunto de soluções da equação linear é dado por

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + w \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) : y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 3 + y + z - 2w & -3y + 2z + w \\ -y - 2z & y + z + w \end{bmatrix} : y, z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. (3 val.) Seja V o espaço dos polinómios de grau ≤ 2 e $W \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o subespaço das matrizes simétricas. Determine a expressão geral de um isomorfismo $f : V \to W$ tal que $f(1) = I$.

Resolução: Para definir um isomorfismo nas condições pedidas é suficiente definir f enviando os elementos de uma base de V para uma base de W, satisfazendo a condição $f(1) = I$. Assim consideramos a base $B_U = \{1, t, t^2\}$ de U e a base $B_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de W, e definimos

$$f(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f(t^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo a expressão geral do isomorfismo é

$$f(a + bt + ct^2) = af(1) + bf(t) + cf(t^2) = \begin{bmatrix} a + b & c \\ c & a - b \end{bmatrix}.$$

3. (3 val.) Sabendo que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível, calcule

$$\det(-A^{n-1}([\text{cof } A]^T)^{-1}).$$

Resolução: Uma vez que para uma matriz invertível temos $A^{-1} = \frac{1}{\det A}[\text{cof } A]^T$, obtemos

$$\begin{aligned}\det(-A^{n-1}([\text{cof } A]^T)^{-1}) &= \det(-A^{n-1}(A^{-1}\cdot\det A)^{-1}) = \det(-A^{n-1}(A^{-1}\cdot\det A)^{-1})\\ &= \det(-A^{n-1}(\det A)^{-1}A) = \det(-A^n(\det A)^{-1})\\ &= (\det A)^{-n}\det(-A^n) = (\det A)^{-n}(-1)^n(\det A)^n = (-1)^n.\end{aligned}$$

4. (3 val.) Considere o espaço V dos polinómios de grau $\leq n$. Sejam

$$U = \{p(t) \in V : p(t) = p(-t), \forall\, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W = \{p(t) \in V : p(t) = -p(-t), \forall\, t \in \mathbb{R}\}$$

os subespaços de polinómios pares e ímpares, respectivamente. Mostre que

$$\text{dim } U + \text{dim } W = n+1.$$

Resolução: Seja $T : V \to V$ definida por $T(p(t)) = p(t) - p(-t)$. É fácil de verificar que T é uma transformação linear. O núcleo de T é o subespaço $N(T) = \{p(t) : T(p(t)) = 0\} = U$. Por outro lado a imagem de T é o subespaço

$$\text{Im}(T) = \{q(t) : T(p(t)) = q(t), p(t) \in V\} = \{q(t) = p(t) - p(-t) : p(t) \in V\}.$$

Então para todo $q(t) \in \text{Im}(T)$ temos $q(-t) = p(-t) - p(t) = -q(t)$, ou seja, $\text{Im}(T) = W$. Usando o Teorema da Característica- Nulidade concluimos que

$$\text{dim}\, U + \text{dim}\, W = \text{dim}\, N(T) + \text{dim}\, \text{Im}(T) = \text{dim}\, V = n+1.$$

Grupo III – Teste 3 – 40 minutos

1. Seja V o espaço vetorial dos polinómios reais de grau ≤ 2 e $T : V \to V$ a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a+2c) + 4bt + (3a+2c)t^2.$$

(a) (3 val.) Determine os valores próprios de T e as respectivas multiplicidades algébricas.

Resolução: Começamos por determinar a matriz que representa T na base $B = (1, t, t^2)$. As imagens dos vectores da base são dadas por

$$T(1) = 1 + 3t^2. \quad T(t) = 4t, \quad T(t^2) = 2 + 2t^2.$$

Logo a matriz que representa T é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(4-\lambda)^2(\lambda+1)$, donde se conclui que os valores próprios de T são 4 e -1, com multiplicidades algébricas 2 e 1, respectivamente.

(b) (3 val.) Determine um subespaço invariante de T de dimensão 2.

Resolução: Calculando a dimensão do espaço próprio de do valor próprio 4, dim$N(A-4I)$, obtemos

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como o núcleo da matriz tem dimensão 2, concluimos que o espaço próprio $E(4)$ é um subespaço invariante de dimensão 2.

(c) (2 val.) Justifique que T é diagonalizável e determine uma base B de V tal que a representação matricial de T na base B é diagonal.

Resolução: T é diagonalizável, porque existe uma base de V formada por vetores próprios: 2 associados ao valor próprio 4 e um valor próprio 1. Usando a alínea anterior, temos

$$N(A-4I) = \left\{ \left(a, b, \frac{3}{2}a\right) : a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

Logo

$$E(4) = \left\{ a\left(1 + \frac{3}{2}t^2\right) + bt : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

O núcleo de $A+I$ é dado pelo núcleo da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

logo $N(A+I) = \{(a, 0, -a) : a \in \mathbb{R}\}$ e $E(-1) = \{\ a(1-t^2) : a \in \mathbb{R}\}$. Donde uma base de vetores próprios pode ser

$$B = \left\{ 1 + \frac{3}{2}t^2, t, 1 - t^2 \right\}.$$

(d) (2 val.) Usando o Teorema de Cayley-Hamilton mostre que

$$T^{-1} = \frac{1}{16}(-T^2 + 7T - 8I).$$

Resolução: Pelo Teorema de Cayley-Hamilton sabemos que $p(T)$ é o endomorfismo nulo, onde $p(\lambda)$ é o polinómio característico. Uma vez que $p(\lambda) = -(4-\lambda)^2(\lambda+1) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 8\lambda - 16$ obtemos

$$p(T) = 0 \Leftrightarrow -T^3 + 7T^2 - 8T - 16I = 0 \Leftrightarrow T(-T^2 + 7T - 8I) = 16I,$$

logo

$$T^{-1} = \frac{1}{16}(-T^2 + 7T - 8I).$$

2. (3 val.) Classifique a forma quadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 2xz + 3z^2$.

Resolução: A matriz simétrica que define esta forma quadrática é a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

cujo polinómio característico é $p(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1)$. Concluimos que os valores próprios da matriz são todos positivos, portanto a forma quadrática é definida positiva.

3. (4 val.) Determine uma decomposição em valores singulares para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   Resolução: Temos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

   com polinómio característico $p(\lambda) = \det(A^T A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda$. Logo os valores próprios são 4 e 0 e os valores singulares são 2 e 0. A matriz dos vetores próprios ortonomados correspondentes é

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Assim, a matriz D da decomposição em valores singulares $A = UDV$ é dada por $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $V = S^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Falta apenas determinar a matriz U, que satisfaz

$$UD = AS = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

   Assim, a primeira coluna de U obtém-se dividindo a primeira coluna de AS pelo valor singular 2. Juntando dois vetores que formem uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ obtemos as restantes colunas de U, por exemplo

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. (3 val.) Seja V um espaço vetorial real com produto interno e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortogonal de V. Dado $v \in V$, seja θ_i o ângulo entre v e v_i. Mostre que

$$\cos^2 \theta_1 + \ldots + \cos^2 \theta_n = 1.$$

   Resolução: Temos $\cos \theta_i = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{\|v\| \|v_i\|}$ e existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, logo

$$\langle v, v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2$$

   e

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \rangle = \alpha_1^2 \|v_1\| + \ldots + \alpha_n^2 \|v_n\|,$$

   porque a base B é ortogonal. Logo

$$\cos^2 \theta_i = \frac{(\langle v, v_i \rangle)^2}{\|v\|^2 \|v_i\|^2} = \frac{\alpha_i^2 \|v_i\|^4}{\|v\|^2 \|v_i\|^2} = \frac{\alpha_i^2 \|v_i\|^2}{\|v\|^2},$$

   e portanto

$$\cos^2 \theta_1 + \ldots + \cos^2 \theta_n = \frac{\alpha_1^2 \|v_1\|^2}{\|v\|^2} + \ldots + \frac{\alpha_n^2 \|v_n\|^2}{\|v\|^2} = \frac{|v\|^2}{\|v\|^2} = 1.$$