

# Álgebra Linear

LEFT e LMAC

Exame de Recuperação - 23 de Janeiro de 2025 - 8h

Duração: 2 horas

Nota do Exame = soma das notas dos Testes/3

**Grupo I – Teste 1 – 40 minutos**

1. Seja  $\alpha$  um parâmetro real e considere o sistema linear cuja a matriz aumentada é dada por

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ \alpha & -\alpha^3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & \alpha & -2\alpha \\ -2 & 2 & 2 & -4 \end{array} \right]$$

- (a) (3 val.) Determine em função de  $\alpha$  quando é que o sistema é impossível, possível, determinado ou indeterminado.
- (b) (1 val.) Para  $\alpha = -1$ , calcule a característica e a dimensão do núcleo de  $A$ .
- (c) (2 val.) Para  $\alpha = 0$ , determine o conjunto de soluções do sistema.
- (d) (3 val.) Para  $\alpha = 1$ , determine equações cartesianas que descrevem o espaço das linhas de  $A$ .
2. (3 val.) Determine a matriz  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  que satisfaz a equação matricial

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \right)^T \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^8.$$

3. (3 val.) Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 2 & 3 & c \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  uma matriz invertível. Determine, justificando, a 1ª coluna da matriz  $A^{-1}$ .

4. (3 val.) Seja  $V$  o espaço vetorial dos polinómios reais de grau  $\leq 3$  e considere os subespaços de  $V$  definidos por

$$U = L\left(\{t^2 - t, 1 + t - t^2 + t^3\}\right) \quad \text{e} \quad W = \{a + bt + ct^2 + dt^3 \in V : a - c = 0\}.$$

Determine  $p(t) \in V$  tal que  $U \cap W = L(\{p(t)\})$ .

5. (2 val.) Sejam  $A_1, \dots, A_m \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Suponha que existe  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A_1 x = \dots = A_m x = 0$ . Mostre que  $\{A_1, \dots, A_m\}$  não é um conjunto gerador para  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

**Grupo II – Teste 2 – 40 minutos**

1. Seja  $V$  o espaço dos polinómios reais de grau  $\leq 2$  e  $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow V$  a transformação linear definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 - t, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = t^2 - 1, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 + t.$$

Considere a transformação linear  $S : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$S(a + bt + ct^2) = a + b + c.$$

- (a) (2 val.) Determine a matriz que representa a transformação linear  $T$  em relação à base

$$B = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ de } M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ e à base } B' = (1, t, t^2) \text{ de } V.$$

- (b) (3 val.) Determine uma base para o núcleo de  $T$  e diga, justificadamente, se  $T$  é sobrejectiva.

- (c) (3 val.) Determine a matriz que representa  $S \circ T$  em relação à base  $B$  de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e a base canónica  $B_c = \{1\}$  de  $\mathbb{R}$ .

- (d) (3 val.) Resolva em  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  a equação linear  $(S \circ T)(A) = 3$ .

2. (3 val.) Seja  $V$  o espaço dos polinómios de grau  $\leq 2$  e  $W \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  o subespaço das matrizes simétricas. Determine a expressão geral de um isomorfismo  $f : V \rightarrow W$  tal que  $f(1) = I$ .

3. (3 val.) Sabendo que  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  é uma matriz invertível, calcule

$$\det(-A^{n-1}([\text{cof } A]^T)^{-1}).$$

4. (3 val.) Considere o espaço  $V$  dos polinómios de grau  $\leq n$ . Sejam

$$U = \{p(t) \in V : p(t) = p(-t), \forall t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W = \{p(t) \in V : p(t) = -p(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

os subespaços de polinómios pares e ímpares, respectivamente. Mostre que

$$\dim U + \dim W = n + 1.$$

**Grupo III – Teste 3 – 40 minutos**

1. Seja  $V$  o espaço vetorial dos polinómios reais de grau  $\leq 2$  e  $T : V \rightarrow V$  a transformação linear definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a + 2c) + 4bt + (3a + 2c)t^2.$$

- (a) (3 val.) Determine os valores próprios de  $T$  e as respectivas multiplicidades algébricas.
- (b) (3 val.) Determine um subespaço invariante de  $T$  de dimensão 2.
- (c) (2 val.) Justifique que  $T$  é diagonalizável e determine uma base  $B$  de  $V$  tal que a representação matricial de  $T$  na base  $B$  é diagonal.
- (d) (2 val.) Usando o Teorema de Cayley-Hamilton mostre que

$$T^{-1} = \frac{1}{16}(-T^2 + 7T - 8I).$$

2. (3 val.) Classifique a forma quadrática  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 2xz + 3z^2$ .

3. (4 val.) Determine uma decomposição em valores singulares para a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

4. (3 val.) Seja  $V$  um espaço vetorial real com produto interno e  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base ortogonal de  $V$ . Dado  $v \in V$ , seja  $\theta_i$  o ângulo entre  $v$  e  $v_i$ . Mostre que

$$\cos^2 \theta_1 + \dots + \cos^2 \theta_n = 1.$$