

# Será possível encontrar topologia numa fábrica?

Daniela Pontes  
Instituto Superior Técnico

March 24, 2006

## Abstract

Imaginemos uma fábrica e alguns robots que se deslocam por ela para realizarem uma determinada tarefa, contornando alguns obstáculos. Será que, sabendo o número de robots e qual o seu percurso, poderemos visualizar o seu espaço de configurações? Se sim, qual o aspecto desses espaços? Serão fáceis ou difíceis de visualizar? Haverá maneira de os simplificar? Até que ponto essa simplificação será válida? É no âmbito da topologia que serão dadas as respostas a estas e outras questões. Para concluir, far-se-à uma introdução à teoria das tranças e veremos como se ajusta a este problema.

## 1 Introdução

Sabe-se hoje que se podem encontrar objectos topológicos bastante interessantes num armazém ou numa fábrica automatizada.

Os exemplos de espaços topológicos construídos neste artigo surgiram simultaneamente de dois campos completamente distintos.

A. Abrams descobriu estes espaços depois de ter trabalhado com H. Landau, Z. Landau, J. Pommersheim, e E. Zaslów sobre problemas relacionados com múltiplos percursos aleatórios em grafos.

R. Ghrist descobriu estes mesmos espaços enquanto trabalhava com D. Koditschek no Laboratório de Inteligência Artificial na Universidade de Michigan, o que mostra que também existem objectos topológicos no mundo físico.

Desde 1960 que se desenvolvem ideias sobre espaços de configurações para robots, tanto por matemáticos, como na área da computação e engenharia. Vários tipos de espaços de configurações surgem na topologia e na física tal como no estudo das tranças.

## 2 Motivação

Imagine-se uma fábrica ou um armazém onde existem robots, cuja sua função seja transportar objectos de um local para outro.

Obviamente, pretende-se encontrar um algoritmo que permita que estes robots se possam deslocar, enquanto desempenham a sua função, sem chocarem uns com os outros. Caso contrário, esses choques iriam dar prejuízo à fábrica, tanto na manutenção dos robots como na sua própria produção.

Esta ideia não está apenas presente nas fábricas. Pode-se também pensar num hipermercado e nos seus carrinhos de compras: “Por onde se pode deslocar sem se correr o risco de chocar com as outras pessoas?”.

Estes são apenas dois exemplos de locais onde se pode encontrar topologia, mas existem outros. No entanto, para a compreensão desta exposição, bastam estas duas situações.

Para responder à questão anteriormente colocada é necessário introduzir-se o conceito de espaço de configurações.

### 3 Espaço de configurações

Numa linguagem corrente e mais intuitiva pode-se dizer que o espaço de configurações é composto pelas zonas onde certas partículas se podem encontrar. Neste contexto, são os locais por onde os robots se podem deslocar sem chocarem.

Para representar estes espaços usa-se a notação  $C^n(\mathbb{R}^m)$ , que define o espaço de configurações de  $n$  partículas que se deslocam em  $\mathbb{R}^m$ .

Para uma melhor compreensão do conceito seguem-se alguns exemplos.

#### 3.1 $C^2(\mathbb{R})$ , espaço de configurações de 2 partículas que se deslocam na recta real

Suponha-se que se tem 2 partículas ( $x_1$  e  $x_2$ ) que se deslocam na recta real. Estas podem tomar qualquer posição dessa recta. No entanto não podem estar ao mesmo tempo na mesma posição. No contexto presente nesta exposição, suponha-se que dois robots se deslocam num mesmo corredor infinito da fábrica. Assim, as suas posições vão “desenhar” um plano em  $\mathbb{R}^2$  (ver exemplos na Figura 1), excepto a recta  $x_1 = x_2$ , como se pode observar na Figura 2.

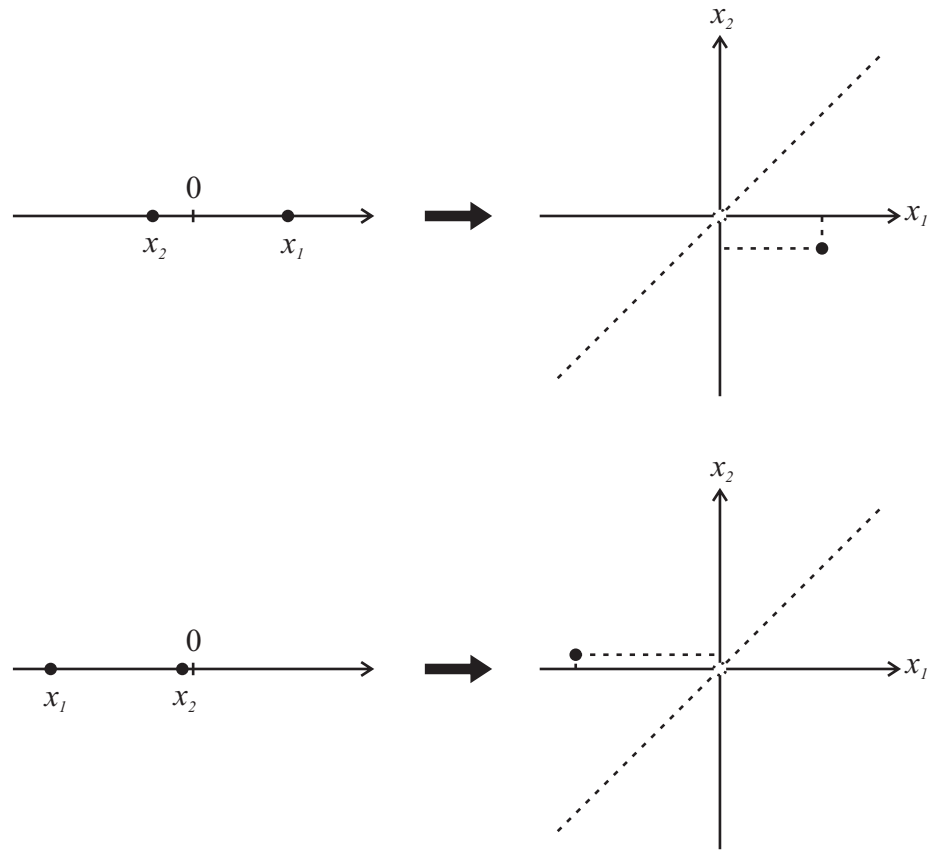


Figura 1: Exemplo de dois pontos do espaço de configurações (à direita) de duas partículas que se deslocam na recta real (à esquerda).

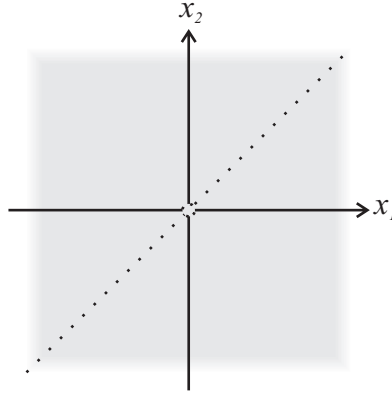


Figura 2: Espaço de configurações gerado pelo movimento de duas partículas na recta real.

Pode-se então dizer que o espaço de configurações de 2 partículas que se deslocam na recta real é da forma

$$C^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$$

### 3.2 $C^3(\mathbb{R})$ , espaço de configurações de 3 partículas que se deslocam na recta real

Esta situação é muito semelhante à anterior: três robots ( $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ ) que se deslocam no mesmo corredor infinito da fábrica, mas que não podem chocar entre si. Assim, as suas posições vão desenhar todo o espaço em  $\mathbb{R}^3$ , excepto os planos  $x_1 = x_2$ ,  $x_2 = x_3$  e  $x_1 = x_3$ , que se encontram na Figura 3.

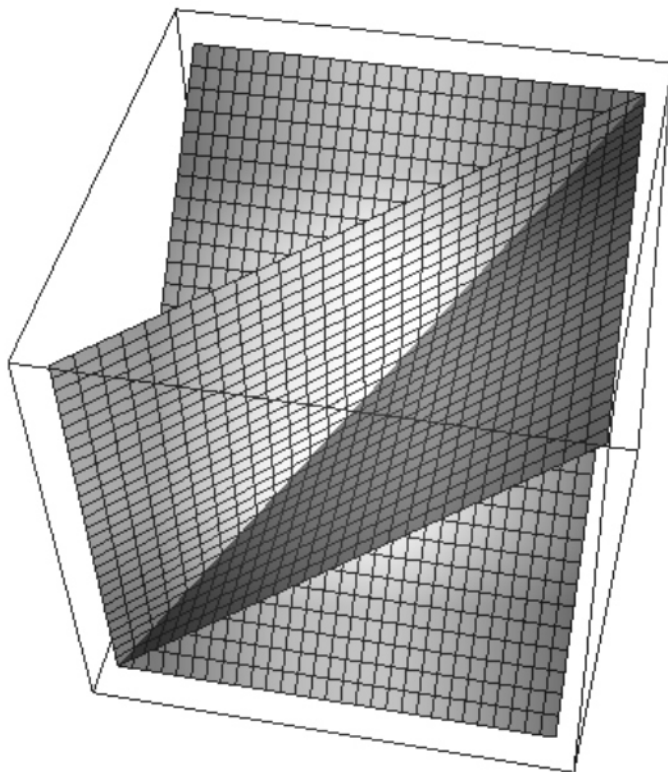


Figura 3: Visualização dos planos em  $\mathbb{R}^3$  que não fazem parte do espaço de configurações de três partículas que se deslocam na recta real.

Pode-se então dizer que o espaço de configurações de três partículas que se deslocam na recta real é da forma

$$C^3(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 \vee x_2 = x_3 \vee x_1 = x_3\}$$

### 3.3 $C^2([a, b])$ , espaço de configurações de 2 partículas que se deslocam no intervalo $[a, b]$

Este caso é em tudo semelhante ao primeiro. A única diferença reside no facto de em vez de se ter a recta real, tem-se apenas um intervalo desta. Esta situação

traduz-se na deslocação de dois robots num corredor da fábrica. O espaço obtido pelas suas posições é o que se encontra na Figura 4.

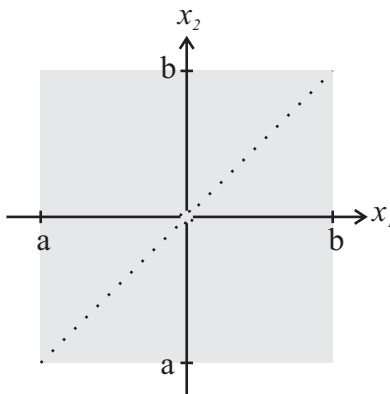


Figura 4: Espaço de configurações gerado pelo movimento de duas partículas num intervalo  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ .

Pode-se então dizer que o espaço de configurações de 2 partículas que se deslocam num intervalo da recta real é da forma

$$C^2([a, b]) = [a, b] \times [a, b] \setminus \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$$

### 3.4 $C^2(\mathbb{R}^2)$ , espaço de configurações de duas partículas no plano $\mathbb{R}^2$

Este é da forma

$$C^2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, y_1), (x_2, y_2) : x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2\}$$

### 3.5 $C^3(\mathbb{R}^2)$ , espaço de configurações de três partículas no plano $\mathbb{R}^2$

Este é da forma

$$C^3(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{array}{l} (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) : \\ (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2) \vee \\ (x_2 = x_3 \wedge y_2 = y_3) \vee \\ (x_1 = x_3 \wedge y_1 = y_3) \end{array} \right\}$$

No entanto, uma fábrica não é apenas constituída por um corredor como se viu nestes exemplos e muitas vezes possui obstáculos que impedem a livre circulação dos robots. Desta forma, deve-se fazer outro tipo de análise: parece mais correcto considerar a fábrica como um grafo.

## 4 Grafos

A teoria de grafos é bastante mais complexa do que os aspectos que vão ser considerados aqui. Não se pretende dar a conhecer em detalhe toda essa teoria, mas sim explicar e exemplificar alguns conceitos que serão úteis no decorrer desta exposição.

Um grafo pode ser considerado como uma rede de arestas e vértices (ver exemplo na Figura 5).

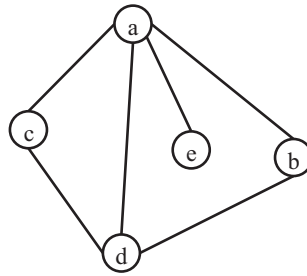


Figura 5: Exemplo de grafo com 5 vértices e 6 arestas.

Cada vértice tem uma determinada valência, ou seja, número de arestas que terminam nesse vértice.

Vértice	Valência
a	4
b	2
c	2
d	3
e	1

Tabela 1. Valência de cada vértice para o grafo representado na figura 5.

Neste caso, pode-se considerar cada aresta do grafo como um corredor da fábrica e os vértices o encontro de corredores.

## 5 Espaços de configurações de partículas que se movimentam em grafos

A notação utilizada para indicar os espaços de configurações de grafos é semelhante à utilizada nos exemplos anteriores. Desta forma,  $C^n(\Gamma)$  indica o espaço de configurações de  $n$  partículas, neste caso em particular robots, que se deslocam no grafo  $\Gamma$ .

A forma formal deste espaço segue a mesma estrutura dos indicados anteriormente, ou seja, este espaço poderá ser indicado da seguinte forma

$$C^n(\Gamma) = \underbrace{\Gamma \times \Gamma \times \dots \times \Gamma}_{n \text{ vezes}} \setminus \Delta$$

Assim, surgem algumas questões:

1. Qual o aspecto destes espaços?
2. O que é ou qual a forma do conjunto  $\Delta$ ?
3. Como impedir que os robots colidam entre si?

A partir de agora vamos responder a estas questões com alguns exemplos de grafos e respectivos espaços de configurações.

### 5.1 Espaço de configurações de duas partículas num grafo com três arestas e quatro vértices

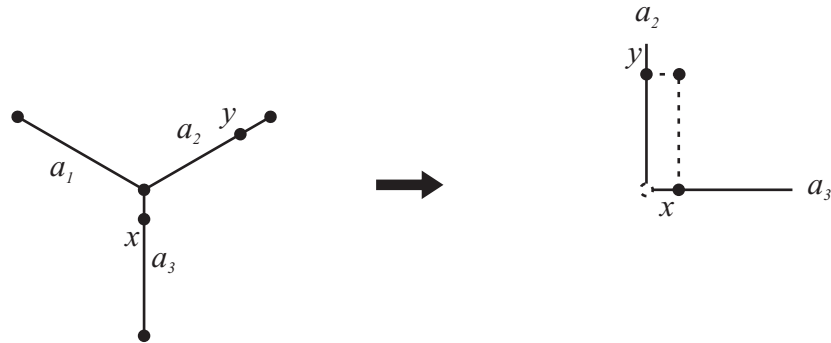


Figura 6: Exemplo de uma configuração de partículas no grafo, e do respectivo ponto no espaço de configurações.



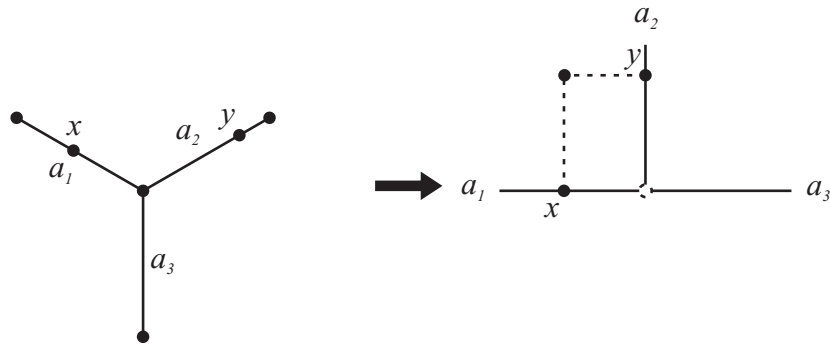


Figura 7: Mais uma configuração de partículas no grafo. Note-se que para cada combinação diferente de partículas e arestas irá originar uma parte diferente do espaço. Dado que são 6 combinações, será necessário comprimir os eixos (ver Figura 8).

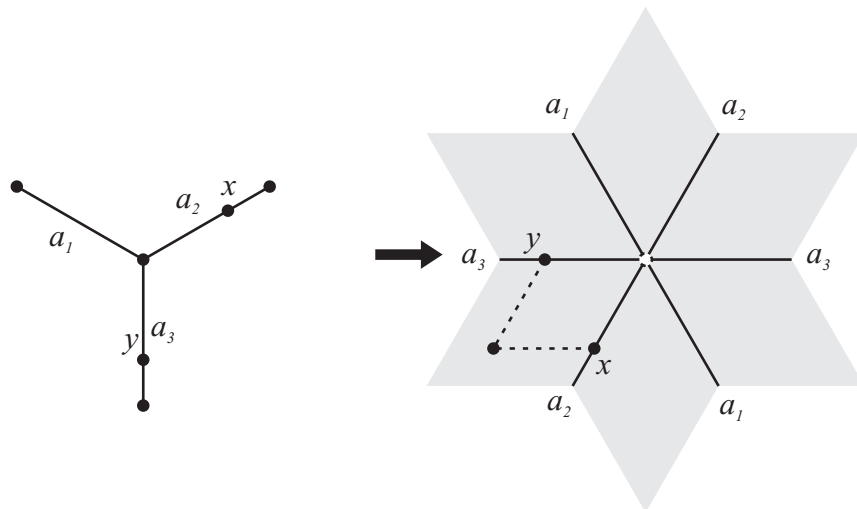


Figura 8: Espaço resultante de todas as combinações entre partículas e arestas. Faltam ainda representar os casos em que se tem duas partículas na mesma aresta (ver Figura 9).

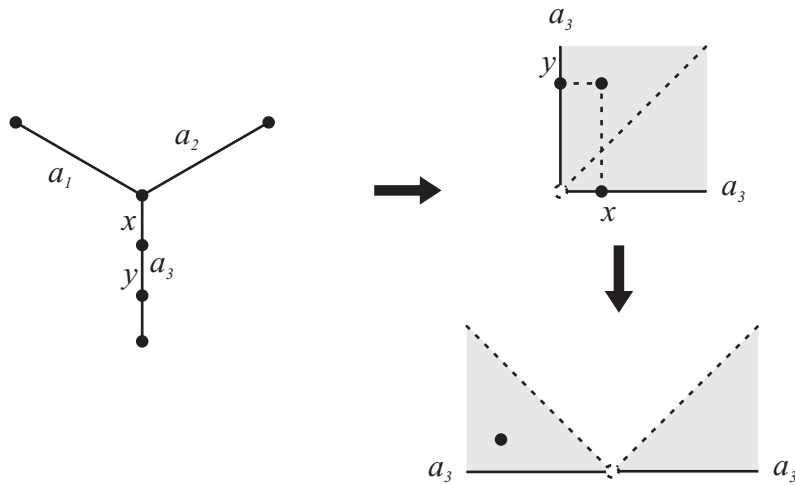


Figura 9: Caso particular de duas partículas na mesma aresta. Para se poder sobrepor esta configuração na obtida na figura 8, divide-se o espaço em metade (ver Figura 10). A linha a tracejado representa um conjunto de pontos que não se pode obter: as duas partículas nunca se podem encontrar no mesmo ponto.

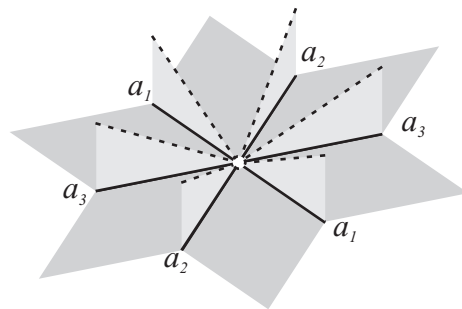


Figura 10: Espaço de configurações obtido para duas partículas que se deslocam num grafo com três arestas e quatro vértices.

## 5.2 Outros exemplos de espaços de configurações

Este é um espaço de configurações mais complicado de se explicar, que aqui foi colocado a título de exemplo, uma vez que será referido posteriormente.

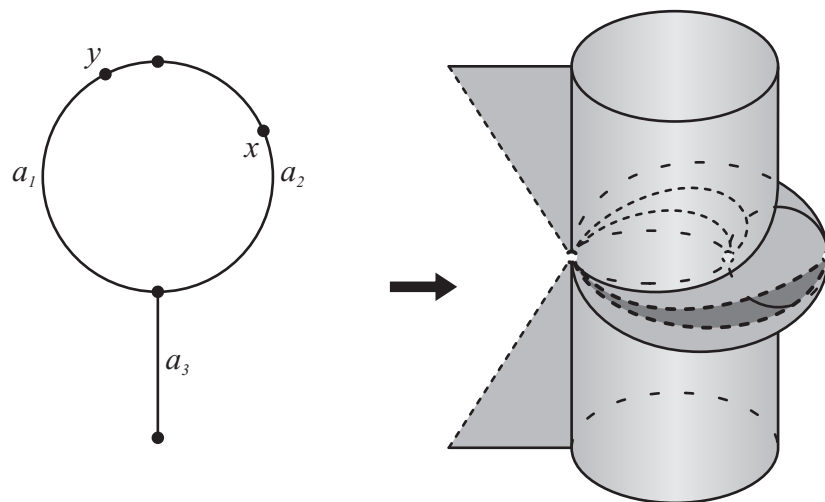


Figura 11: Espaço de configurações de duas partículas que se deslocam num grafo com três arestas e três vértices.

O espaço de configurações de duas partículas que se movimentam num grafo como o exemplificado na Figura 12, constrói-se de forma semelhante ao da Figura 6. No entanto, este é um espaço com maior complexidade, pois o vértice central do grafo possui maior valência.

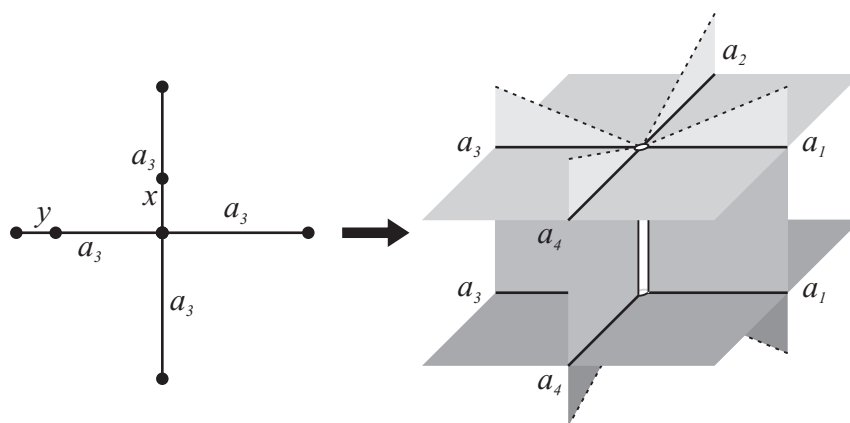


Figura 12: Espaço de configurações para duas partículas que se deslocam num grafo com quatro arestas e cinco vértices.

Como se pode verificar, aumentando a valência do vértice central do grafo aumenta-se a complexidade do espaço de configurações. Surge então a necessidade de tentar simplificar estes espaços. Uma maneira de os simplificar é impondo certas condições. Neste caso, uma forma de evitar que os robots colidam é impedir que eles se desloquem no mesmo corredor ao mesmo tempo, ou seja, em termos de grafos, terá de existir, no mínimo, uma aresta entre cada partícula. Desta forma, eliminam-se os triângulos do espaço de configurações, o que lhe confere um aspecto mais simples. Esta simplificação recebe o nome de discretização.

## 6 Discretização

Para se referir o espaço de configurações simplificado de partículas que se deslocam no grafo  $\Gamma$  usa-se a notação  $D^n(\Gamma)$ , ou seja, o espaço que surge impondo a condição de que terá de existir pelo menos uma aresta entre cada dois robots.

Tendo em conta o grafo da Figura 13 e a condição de que tem de existir pelo menos uma aresta entre as partículas, conclui-se que é necessário que uma delas esteja parada num vértice (excepto o central) para que a outra se possa movimentar nas arestas. Assim, quando se está nessa situação, no espaço de configurações simplificado, surge uma aresta. Como para cada vértice (excepto o central) a partícula que se movimenta pode estar em duas arestas do grafo e como elas podem trocar de funções, ou seja, a partícula que está em movimento ficar fixa no vértice e a que estava fixa entrar em movimento tem-se que, no espaço de configurações, se irá ter 12 arestas. Quando as duas partículas estão em vértices distintos, nesse espaço, aparecerá um pontinho. Quando a partícula  $x$  está parada num vértice, a  $y$  poderá estar nos outros 3 vértices e fazendo as contas conclui-se que terão de existir 12 pontinhos no espaço de configurações, como se pode ver na Figura 13.

Este é um espaço conexo e orientável.

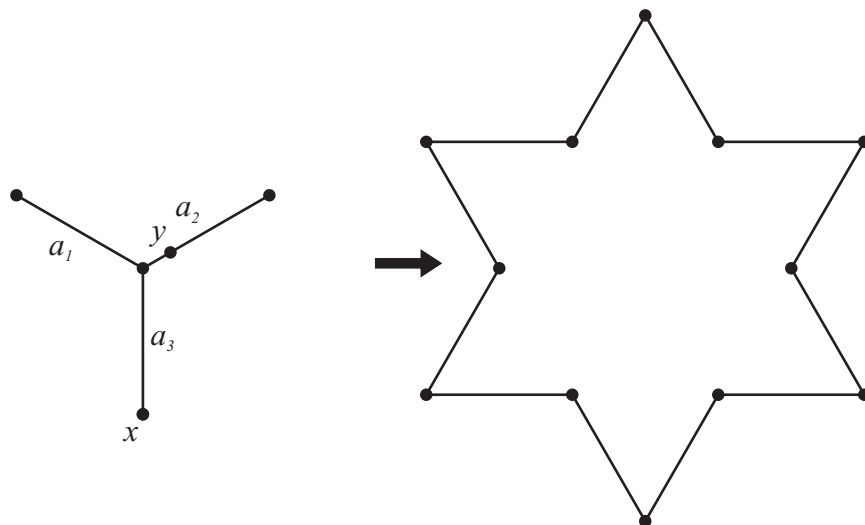


Figura 13: Espaço de configurações simplificado para duas partículas que se deslocam no grafo da Figura 10.

Para o caso de duas partículas que se deslocam no grafo da figura 14, quando uma partícula de encontra em movimento na aresta 3, a outra só poderá estar parada no vértice superior e desta situação surge uma aresta no espaço de configurações. Para que a partícula que se encontrava no vértice superior se possa movimentar, a outra terá de estar fixa no vértice inferior. Ora, como as partículas não conseguem trocar entre si sem quebrarem a condição imposta o espaço terá de ser desconexo, como se pode observar na Figura 14.

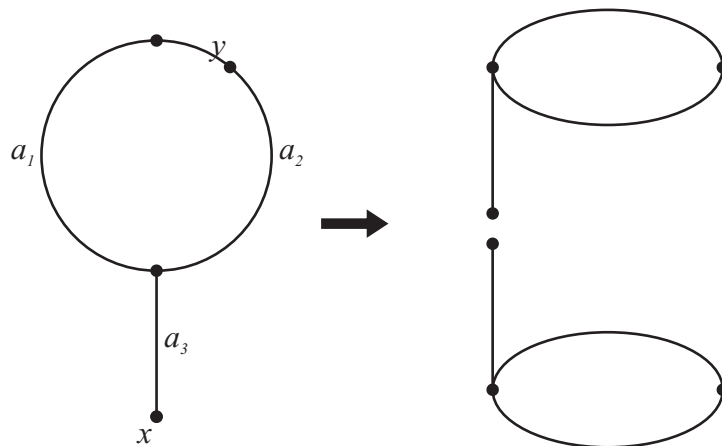


Figura 14: Espaço de configurações simplificado para duas partículas que se deslocam no grafo da Figura 11.

Seguindo a mesma linha de raciocínio que se usou para a construção do espaço de configurações simplificado da Figura 13, de cada vez que as duas partículas se encontram paradas em vértices distintos do grafo surge um pontinho no espaço de configurações. Assim, quando a partícula  $x$  está parada num vértice, a  $y$  poderá estar em qualquer um dos outros 4, mas a partícula  $x$  poderá (quando a  $y$  assim o permitir) estar num total de 5 vértices, donde surgem 20 pontinhos no espaço de configurações simplificado. As arestas deste espaço formam-se quando se tem uma partícula num vértice e outra em movimento nas arestas. Ora para um dado vértice a partícula em movimento pode estar em 3 arestas distintas. Como temos 4 vértices e 2 partículas que permitem esta situação, segue-se que se tem  $4 \times 3 \times 2 = 24$  arestas, como se pode ver na Figura 15 (entre cada dois vértices existe uma aresta). Este espaço não é orientável.

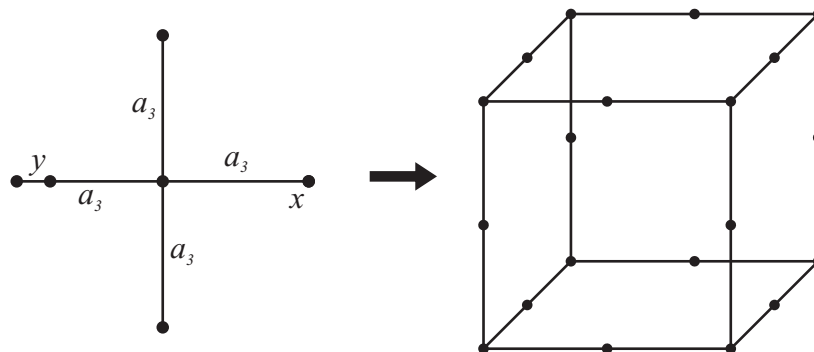


Figura 15: Espaço de configurações simplificado para duas partículas que se deslocam no grafo da Figura 12.

Verifica-se então que através do conhecimento do aspecto do grafo se consegue inferir sobre o número de vértices, arestas e faces do espaço de configurações simplificado.

Pretende-se agora saber quais os constituintes deste espaço para grafos não-planares. Estes são uma rede de arestas e vértices onde as arestas se intersectam entre si sem que, no entanto, essa intersecção seja considerada como vértice. São, no fundo, grafos que não podem existir num plano devido a essas intersecções.

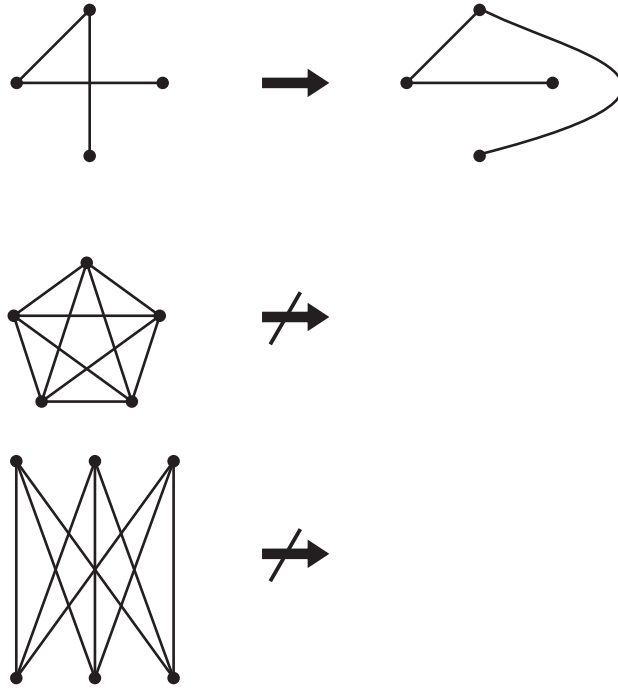


Figura 16: Exemplos de grafos planar (primeiro) e não planares (segundo, denominado por  $K_5$ , e último, denominado por  $K_{3,3}$ ).

Através da forma do grafo pretende-se agora contabilizar o número de vértices, arestas e faces do espaço de configurações simplificado.

Analise-se primeiro o grafo  $K_5$ <sup>1</sup>:

Para a partícula  $x$  fixa num vértice, a  $y$  poderá estar em qualquer um dos outros 4 vértices. No entanto, a partícula  $x$  poderá estar num total de 5 vértices, donde se conclui que o espaço de configurações simplificado contém  $5 \times 4 = 20$  pontinhos.

Quando a partícula  $x$  está parada num vértice, a  $y$  poderá deslocar-se em 6 arestas distintas sem no entanto quebrar a condição imposta. Mas a partícula  $x$  poderá estar parada num total de 5 vértices e como se tem 2 partículas segue-se que o espaço é constituído por  $6 \times 5 \times 2 = 60$  arestas.

Neste caso, as partículas podem movimentar-se ao mesmo tempo, em arestas diferentes, mantendo sempre, no mínimo, uma aresta entre elas. Daqui surgirão faces no espaço de configurações. Desta forma, quando a partícula  $x$  se movimenta numa aresta, a  $y$  pode movimentar-se em 3 arestas. Determinam-se um total de  $3 \times 10 = 30$  faces.

<sup>1</sup>A notação  $K_n$  denota um grafo com  $n$  vértices, em que cada um está ligado a todos os outros, ou seja, entre qualquer par de vértices distintos existe uma aresta a ligá-los.



Fazendo o mesmo estudo para o grafo  $K_{3,3}$ <sup>2</sup>, conclui-se que o seu espaço de configurações simplificado é constituído por: 30 pontinhos, 72 arestas e 36 faces.

Quando o espaço é conexo e orientável, este é determinado pela característica de Euler

$$\chi(D^n(\Gamma)) = \# \text{faces} - \# \text{arestas} + \# \text{vértices}$$

$$\text{Género} = 1 - \frac{1}{2}\chi$$

Concretizando para o grafo não planar  $K_5$

$$\chi(D^2(K_5)) = 30 - 60 + 20 = -10$$

$$\text{Género} = 1 + \frac{10}{2} = 6$$

A partir daqui pode-se concluir que o espaço de configurações simplificado  $D^2(K_5)$  pode ser transformado topologicamente na Figura 17.



Figura 17: Variedade de gênero 6.

Concretizando para o grafo  $K_{3,3}$

$$\chi(D^2(K_{3,3})) = 36 - 72 + 30 = -6$$

$$\text{Género} = 1 + \frac{6}{2} = 4$$

Donde se conclui que o espaço de configurações simplificado  $D^2(K_{3,3})$  pode ser transformado topologicamente na Figura 18.



Figura 18: Variedade de gênero 4.

<sup>2</sup>A notação  $K_{m,n}$  denota um grafo com dois conjuntos de vértices, em que  $m$  e  $n$  são as dimensões respectivas, e entre cada vértice do primeiro se liga a cada um do segundo.

No entanto, estas simplificações  $D^n(\Gamma)$  nem sempre são válidas. Já foi dado um exemplo em que a simplificação de  $C^n(\Gamma)$  em  $D^n(\Gamma)$  não é credível.

Repare-se que o espaço da Figura 11 é conexo e o da Figura 14 não o é, pelo que não se está perante uma boa simplificação, pois os espaços deveriam ser semelhantes.

Para que  $D^n(\Gamma)$  seja uma boa simplificação de  $C^n(\Gamma)$  tem-se de conseguir transformar  $C^n(\Gamma)$  em  $D^n(\Gamma)$  de forma contínua. Neste sentido surge o seguinte teorema:

**Teorema 1** *Para  $n > 1$  e um grafo  $\Gamma$  com pelo menos  $n$  vértices,  $D^n(\Gamma)$  é uma boa simplificação de  $C^n(\Gamma)$  se e só se:*

1. cada caminho entre 2 vértices de valência não igual a 2 passa pelo menos por  $n - 1$  arestas;
2. quando se parte de um vértice e se volta a ele passa-se pelo menos por  $n + 1$  arestas<sup>3</sup>.

A dimensão do espaço  $D^n(\Gamma)$  tem uma grande importância na prática, pois uma grande dimensão faz crescer muito rapidamente a complexidade destes espaços, criando grandes dificuldades de visualização.

Neste sentido surge outro teorema:

**Teorema 2** *Dado um grafo  $\Gamma$  com  $V$  vértices de valência maior que 2, o espaço  $D^n(\Gamma)$  possui no máximo dimensão igual a  $V$ .*

Donde se conclui que a dimensão do espaço de configurações simplificado não depende do número de partículas, neste caso robots, que se deslocam pelo grafo.

Seja  $\Upsilon_k$  um grafo com  $k > 2$  arestas e  $k + 1$  vértices, em que todas as arestas estão unidas no mesmo vértice central (relembrando a Figura 6, temos um  $\Upsilon_3$ , e a Figura 12, que é um  $\Upsilon_4$ ).

Pelo teorema verifica-se que  $\Upsilon_k$ , com  $k = 3, 4$  possui dimensão igual a um.

Assim, desde que as propriedades topológicas sejam determinadas pela característica de Euler, pode-se apenas determinar o número de vértices, arestas e faces para se conseguir determinar a dimensão desses espaços.

A partir daqui pode-se provar que  $D^n(\Upsilon_k)$  pode deformar-se num grafo tipo *bouquet* com  $P$  curvas fechadas que se encontram num ponto, tal como as pétalas numa flor. O número de curvas fechadas  $P$  é dado por

$$P = 1 + (nk - 2n - k + 1) \frac{(n + k - 2)!}{(k - 1)!}$$

Por exemplo,  $D^2(\Upsilon_3)$  pode ser deformado/simplificado num curva apenas como se pode ver na Figura 19.

---

<sup>3</sup>O grafo da figura 11 falha esta condição. De acordo com o Teorema 1, inserindo um vértice 2-valente à parte circular do grafo garante que a simplificação do respectivo espaço de configurações é válida.

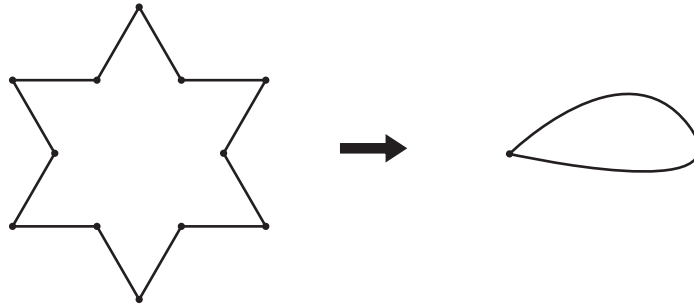


Figura 19: Deformação de  $D^2(\Upsilon_3)$ .

Por exemplo,  $D^2(\Upsilon_4)$  pode ser deformado/simplificado na curva que se pode ver na Figura 20.

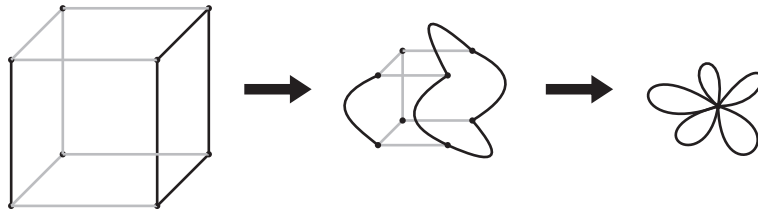


Figura 20: Deformação de  $D^2(\Upsilon_4)$

## 7 Tranças

Do estudo de tranças surgem vários tipos de espaços de configurações, daí que este tema seja abordado nesta exposição.

Desta forma, convém que se tenha pelo menos uma ideia sobre o que é uma trança e conhecer algumas das suas propriedades.

Estamos então perante o grupo das tranças  $(G, *)$  e tal como todos os grupos, este é uma estrutura algébrica que satisfaz as seguintes propriedades:

1. a operação  $*$  tem identidade  $e$  em  $G$ ;
2. a operação  $*$  é associativa;
3. todos os elementos de  $G$  são invertíveis.

Um grupo diz-se abeliano se a sua operação é comutativa.

## 7.1 Exemplos de grupos

1.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  com multiplicação dos números reais;
2. Grupo das tranças com  $n$  fios:  
Este grupo é gerado pelos elementos da Figura 21 com relações:

- (a)  $\sigma_i \sigma_i^{-1} = e = \sigma_i^{-1} \sigma_i$
- (b)  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$
- (c)  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| > 1$

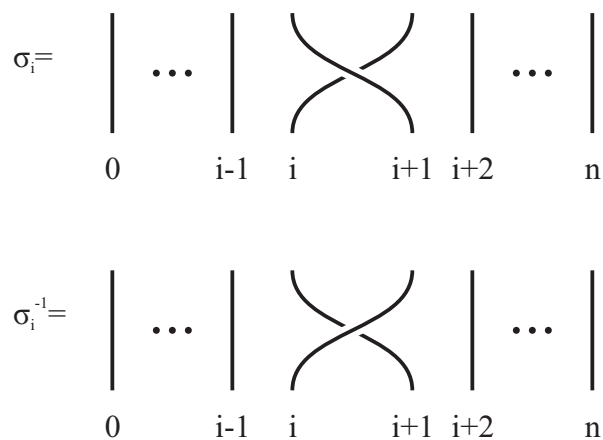


Figura 21: Elementos dos grupos das tranças com  $n$  fios.

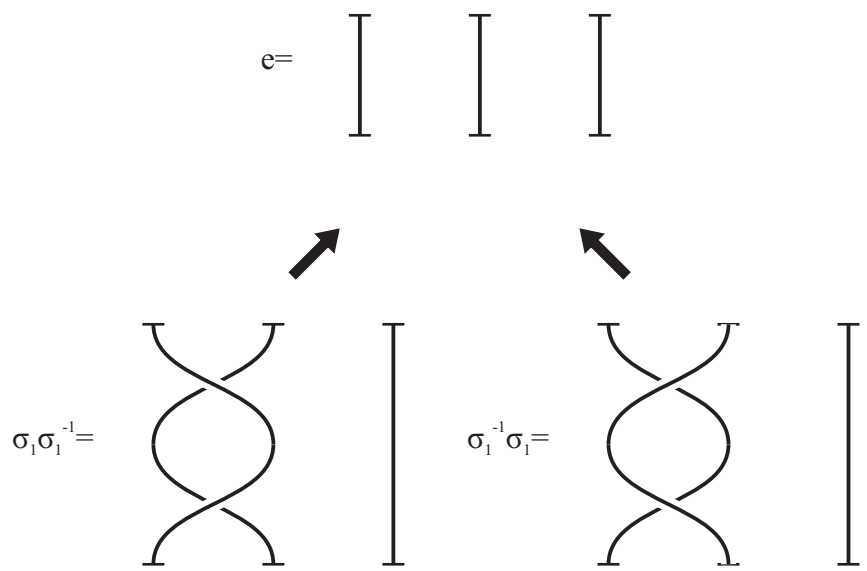


Figura 22: Exemplo da relação a.

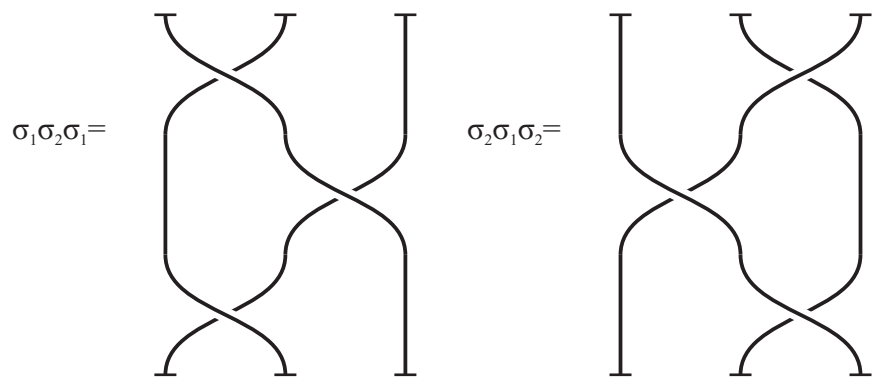


Figura 23: Exemplo da relação b.

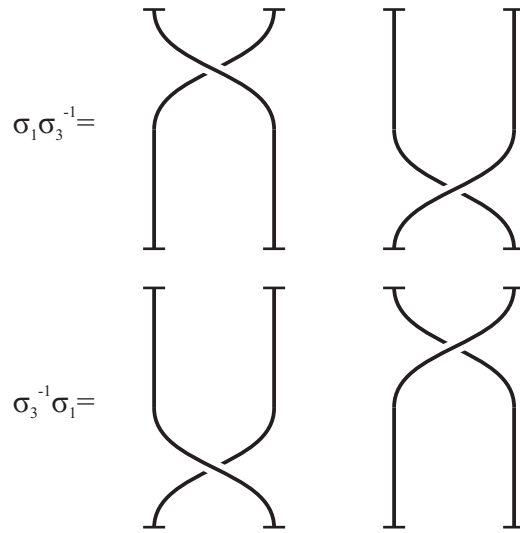


Figura 24: Exemplo da relação c.

Depois desta pequena introdução, pretende-se relacionar as tranças com os espaços de configurações.

Qualquer curva fechada no espaço  $C^n(\mathbb{R}^2)$  é uma trança pura de  $n$  fios. Diz-se pura porque cada fio acaba por voltar à sua posição de origem (tal como nas curvas fechadas, onde o ponto inicial coincide com o ponto final).

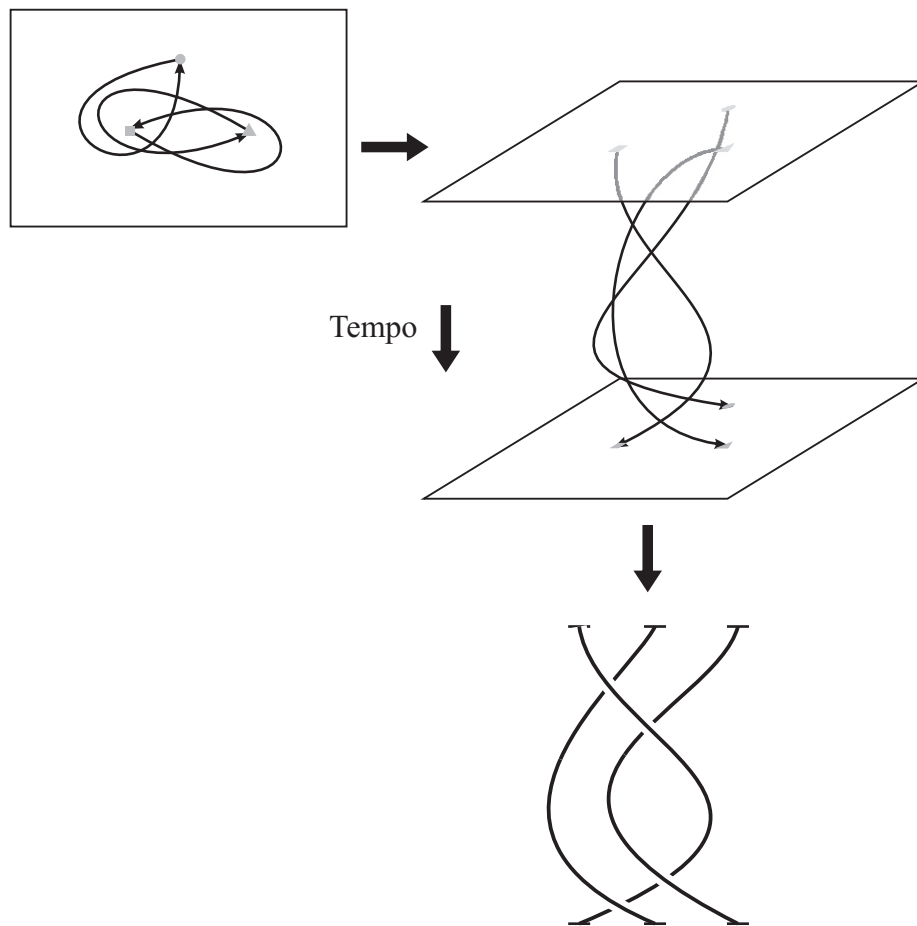


Figura 25: O gráfico de espaço-tempo para uma curva fechada em  $C^3(\mathbb{R}^2)$  é uma trança pura de 3 fios.

Daqui consegue-se obter o gráfico espaço-tempo que não é mais do que uma trança, neste caso de 3 fios (ver Figura 25).

## 7.2 Curiosidade

Tem-se que um nó poderá ser obtido se “fechamos” uma trança, tal como se pode ver na Figura 27.

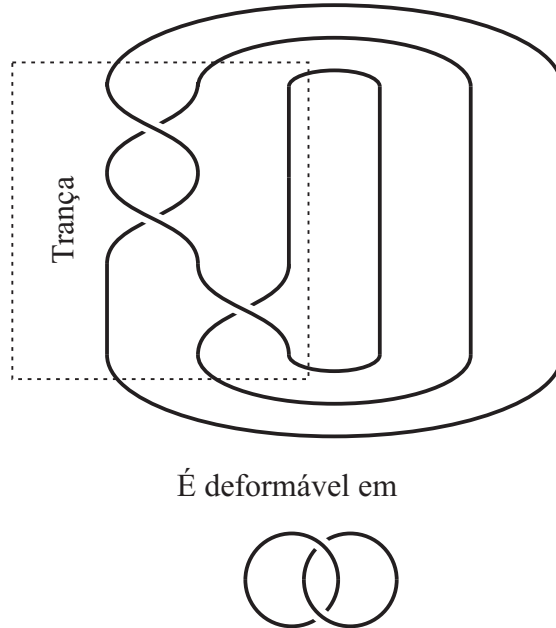


Figura 27: Resultado da deformação de uma trança previamente fechada, o chamado Enlace de Hopf.

## 8 Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao professor Roger Picken do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico por toda a ajuda e tempo dispensado, tanto no processo de aprendizagem do tema como na sua posterior apresentação.

Aproveito para agradecer à Fundação Calouste Gulbenkian pela oportunidade que me foi dada para aprofundar os meus conhecimentos.

Não posso deixar de agradecer à Organização do Seminário Diagonal do Instituto Superior Técnico o convite para a apresentação do seminário e para a elaboração deste artigo, tal como à Organização do Seminário Diagonal da Universidade do Porto pelo convite para a apresentação do mesmo seminário.

Finalmente, um agradecimento muito especial para o João Pedro Maurício e Silva, que me apoiou desde o início, me ajudou bastante na preparação da apresentação do seminário e deste artigo.



## 9 Referências

- [1] A. ABRAMS AND R. GHRIST. *Finding Topology in a Factory: Configuration Spaces*, The American Mathematical Monthly 109 n.º 2, 140-150, 2002
- [2] L. H. KAUFFMAN, *Knots and Physics*, Singapore: World Scientific, 1994
- [3] J. S. BIRMAN, *Braids, links, and mapping class groups*, Princeton University Press, 1975
- [4] R. L. FERNANDES, M. RICO, *Introdução à Álgebra Geral*, IST Press, 2004
- [5] J. S. CARTER, *How surfaces intersect in space : an introduction to topology*, Singapore: World Scientific, 1995