

Grupos de Lie e Álgebras de Lie

1º Semestre de 2007/2008

Problemas 2 (para entregar na aula teórica de 18 de Outubro)

1. Seja $Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q}q = 1\}$ e $SO(\mathbb{R}^3)$ o grupo de Lie das transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^3$, cujas representações matriciais em relação a qualquer base têm determinante 1. Indique as álgebras de Lie correspondentes $LSp(1)$ e $LSO(\mathbb{R}^3)$.

Sendo $q = \cos(\theta) + u \sin(\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi[$, $u \in \mathbb{H}$, $\bar{u} = -u$, $|u| = 1$, e identificando $\mathbb{R}^3$ com $\{v \in \mathbb{H} \mid \bar{v} = -v\}$, um homomorfismo de grupos de Lie é dado por:

$$f : Sp(1) \rightarrow SO(\mathbb{R}^3), \quad q \mapsto T_q, \quad T_q(v) = qvq^{-1}$$

Indique o homomorfismo de álgebras de Lie correspondente: $Lf : LSp(1) \rightarrow LSO(\mathbb{R}^3)$.

2.
 - i) Mostre que o comutador de duas derivações de uma $\mathbb{R}$ -álgebra $[\delta, \delta']$ é novamente uma derivação.
 - ii) Prove que o conjunto de todas as derivações interiores $ad x$, $x \in L$, constitui um ideal de $\text{Der } L$.
3. Mostre que, a menos de isomorfismo, existe uma única álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 3, cuja álgebra derivada tem dimensão 1 e está contida no centro da álgebra.