

Análise Matemática III

1º Teste de Recuperação - 14 de Junho de 2007 - 11h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 ; -x < y < x ; x < z < 2 - x\} .$$

(5 val.) (a) Escreva uma expressão para $\int_S y + z$ em termos de integrais iterados da forma:

$$\text{i) } \int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx \quad \text{ii) } \int \left(\int \left(\int dy \right) dx \right) dz$$

(2,5 val.) (b) Usando uma das expressões obtidas, calcule o integral da alínea anterior.

(2,5 val.) 2. Considere o conjunto

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0 ; z > 0 ; 1 < \sqrt{y^2 + z^2} < 2 - x^2\} .$$

e a função f dada por $f(x, y, z) = \frac{y}{y^2 + z^2}$. Calcule $\iiint_R f$.

(2,5 val.) 3. Calcule o comprimento da curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \cos(x) ; z = \sin(x) ; 0 < x < 3\pi\} .$$

4. Seja L o segmento de recta no plano com ponto inicial $(1, 1)$ e ponto final $(0, 2)$.

(2 val.) (a) Sendo F o campo vectorial $F(x, y) = (x + y, xy)$, calcule $\int_L F \cdot dg$.

(2,5 val.) (b) Considere os campos vectoriais

$$G(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{e} \quad H(x, y) = \left(\frac{1}{x + y^2 - 1}, \frac{2y}{x + y^2 - 1} \right) .$$

Calcule $\int_L (G + H) \cdot dg$.

(1,5 val.) 5. (a) Considere a região em \mathbb{R}^2 dada em termos de coordenadas polares por $0 \leq \theta < 2\pi$, $1 \leq r \leq 2$. Descreva como se pode subdividir esta região em domínios elementares.

(1,5 val.) (b) Seja D o domínio:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x) \leq y \leq h(x) ; a \leq x \leq b\} ,$$

onde g, h são funções de classe C^1 em $[a, b]$. Sendo $F(x, y) = (F_1(x, y), 0)$ um campo vectorial de classe C^1 em D , mostre, usando o teorema fundamental de cálculo e o teorema de Fubini, que se verifica a relação:

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_{\partial D} F \cdot dr$$

onde o segundo membro representa o integral de linha do campo F ao longo da fronteira de D , percorrida no sentido horário.