Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 21 de Abril de 2007 - 13h
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto:
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x < 1 \ ; \ 0 < y < 1-x \ ; \ 0 < z < 2-y\right\} .$$

(5 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma:
$$\text{i)} \int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx \qquad \text{ii)} \int \left(\int \left(\int dy \right) dx \right) dz$$

(2,5 val.) (b) Calcule o volume de S usando uma das expressões obtidas na alínea anterior.

(2,5 val.) 2. Calcule o momento de inércia à volta do eixo Oz do sólido:
$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 < z < 4-x^2-y^2\right\} ,$$
considerando uma densidade de massa constante igual a 1 por unidade de volume.

(3,5 val.) 3. Calcule o trabalho do campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,y)$, definido em $\mathbb{R}^3$, ao longo de

(a) o caminho parametrizado por $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0,\pi]$,

(b) o segmento de recta com ponto inicial $(1,0,0)$ e ponto final $(-1,0,\pi)$.

Com base nestes resultados, o que pode concluir acerca de F ser um gradiente?

4. Seja F o campo vectorial $F(x,y) = \left(\dfrac{1}{x} + ye^{xy}, xe^{xy}\right)$, definido em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\}$.

(1,5 val.) (a) Mostre que F é um campo fechado no seu domínio.

(2 val.) (b) Justifique que F é um gradiente no seu domínio e calcule um potencial para F.

5. Considere os campos vectoriais:
$$F(x,y) = \left(\frac{3(1-y)}{x^2+(y-1)^2}, \frac{3x}{x^2+(y-1)^2}\right), \quad G(x,y) = \left(\frac{y}{(x+4)^2+y^2}, \frac{-(x+4)}{(x+4)^2+y^2}\right).$$

(1,5 val.) (a) Calcule o trabalho de $F+G$ ao longo do caminho fechado parametrizado por $g(t) = ((2+\cos^2(2t))\cos t, (2+\cos^2(2t))\operatorname{sen} t)$, $t \in [0,2\pi]$.

(1,5 val.) (b) Um caminho fechado simples em $\mathbb{R}^2$ é um caminho $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(a) = g(b)$ e a restrição de g ao intervalo $[a,b[$ é injectiva (portanto a curva correspondente não se auto-intersecta, excepto no ponto inicial e final). Seja g um caminho fechado simples, de classe C^1, que descreve uma curva C no domínio de $F+G$. Quais os possíveis valores de $\int_C (F+G) \, . \, dg$? Justifique.