

PARTE III. Formas Diferenciais

As formas diferenciais são os objectos que se podem integrar sobre uma variedade. Por esta razão, elas desempenham um papel crucial na passagem do *local* para o *global*. Nesta terceira série de lições vamos introduzir as formas diferenciais e vamos ver como o estudo de propriedades globais de variedades diferenciáveis pode ser efectuado, eficazmente, com recurso às formas diferenciais.

Os conceitos e ideias principais a reter nesta série são:

- Na Lição 13: A noção de *forma diferencial* e, mais geralmente, de campos tensoriais. As operações elementares sobre formas diferenciais: *produto exterior*, *produto interior* e *pull-back*.
- Na Lição 14: O *diferencial* e a *derivada de Lie* de formas diferenciais, que dão origem ao *cálculo de Cartan* sobre formas diferenciais.
- Na Lição 15: O *integral* de formas diferenciais em variedades e a *Teorema de Stokes*.
- Na Lição 16: A *cohomologia de de Rham* e a sua relação com a *cohomologia singular* diferenciável.
- Na Lição 17: As propriedades básicas da cohomologia de de Rham: *invariância por homotopia* e a *sucessão de Mayer-Vietoris*.
- Na Lição 18: a *dualidade de Poincaré* e algumas aplicações de cohomologia: o *grau* de uma aplicação, a *característica de Euler* de uma variedade, e o *índice de um zero* de um campo vectorial.

LIÇÃO 13. FORMAS DIFERENCIAIS E CAMPOS TENSORIAIS

Se V é um espaço vectorial de dimensão finita d , vamos designar por:

$$\otimes V = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \otimes^k V,$$

a sua **álgebra tensorial**, e por:

$$\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^d \bigwedge^k V$$

a sua **álgebra exterior**. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$, a nossa convenção é tal que:

$$\langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k, \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k \rangle = \det(\alpha_i(\mathbf{v}_j))_{i,j=1}^k.$$

Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear entre dois espaços vectoriais de dimensão finita, recordemos que a sua transposta $T^* : W^* \rightarrow V^*$ é a transformação linear entre os espaços vectoriais duais definida por:

$$T^* \alpha(\mathbf{v}) = \alpha(T\mathbf{v}).$$

Da mesma forma, existe uma aplicação induzida $T^* : \bigwedge^k W^* \rightarrow \bigwedge^k V^*$ definida por:

$$T^* \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega(T\mathbf{v}_1, \dots, T\mathbf{v}_k).$$

Pode-se definir, igualmente, uma aplicação $T^* : \otimes^k W^* \rightarrow \otimes^k V^*$, o que deixamos ao cuidado do leitor.

Depois destes comentários preliminares, seja agora M uma variedade diferenciável. Se $p \in M$ e (x^1, \dots, x^d) são coordenadas locais em p , então os vectores tangentes

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad (i = 1, \dots, d),$$

formam uma base de $T_p M$. Da mesma forma, as formas

$$d_p x^i \quad (i = 1, \dots, d),$$

formam uma base de $T_p^* M$. Estas bases são bases duais. Formando produtos tensoriais ou exteriores dos elementos destas bases, obtemos bases para $\otimes^k T_p M$, $\bigwedge^k T_p M$, $\otimes^k T_p^* M$, $\bigwedge^k T_p^* M$, etc. Por exemplo, Vamos o espaço $\bigwedge^k T_p^* M$, admite a base

$$d_p x^{i_1} \wedge \dots \wedge d_p x^{i_k} \quad (i_1 < \dots < i_k).$$

Tal como no caso dos espaços tangente e cotangente, estamos interessados em considerar para cada um dos espaços $\otimes^k T_p M$, $\bigwedge^k T_p M$, $\otimes^k T_p^* M$, $\bigwedge^k T_p^* M$, etc., a união em que p varia em M . Por exemplo,

$$\bigwedge^k T^* M = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k T_p^* M.$$

Tal como para o fibrado tangente, temos o seguinte resultado cuja demonstração é deixada como exercício.

Proposição 13.1. *Existe uma estrutura de variedade natural em $\bigwedge^k T^* M$ tal que a projecção canónica em M é uma submersão.*

Da mesma forma é possível considerar os fibrados $\wedge^k TM$, $\otimes^k T^*M$, $\otimes^k TM$, $\otimes^k T^*M \otimes^s T^*M$, etc., cujos detalhes deixamos como exercício.

Definição 13.2. *Seja M uma variedade.*

- (i) *Uma **forma diferencial de grau k** é uma secção de $\wedge^k T^*M$.*
- (ii) *Um **campo multivectorial de grau k** é uma secção de $\wedge^k TM$.*
- (iii) *Um **campo tensorial de grau (k, s)** é uma secção de $\otimes^k TM \otimes^s T^*M$.*

Vamos considerar, apenas, formas e campos diferenciáveis, i.e., que sejam secções C^∞ .

Se (U, x^1, \dots, x^d) são coordenadas locais, então uma forma diferencial ω de grau k pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}\omega|_U &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 \dots i_k} \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},\end{aligned}$$

onde as componentes $\omega_{i_1 \dots i_k}$ são anti-simétricas nos índices:

$$\omega_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)} = (-1)^{\text{sgn } \sigma} \omega_{i_1 \dots i_k},$$

para toda a permutação $\sigma \in S_k$. É claro que $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ sse ω é de classe C^∞ . Se (V, y^1, \dots, y^d) é outro sistema de coordenadas locais, então

$$\omega|_V = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \bar{\omega}_{j_1 \dots j_k} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k},$$

com $\bar{\omega}_{j_1 \dots j_k} \in C^\infty(V)$. As componentes nos dois sistemas de coordenadas estão relacionados em $U \cap V$ pela fórmula:

$$\bar{\omega}_{j_1 \dots j_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial(x^{i_1} \dots x^{i_k})}{\partial(y^{j_1} \dots y^{j_k})}.$$

A expressão do lado esquerdo é a abreviatura para o menor correspondente às linhas i_1, \dots, i_k e às colunas j_1, \dots, j_k da matriz jacobiana da mudança de coordenadas.

De igual forma, temos expressões em coordenadas locais para um campo multivectorial Π , que pode ser escrito na forma:

$$\Pi|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \Pi^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}},$$

e para um campo tensorial T , que pode ser escrito na forma:

$$T|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_s} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

Deixamos como exercício determinar as fórmulas de transformação para campos multivectoriais e tensoriais.

Observação 13.3. O leitor poderá estar intrigado com as posições relativas dos índices nos diferentes objectos. A convenção que seguimos é tal, que um índice só aparece numa soma quando na fórmula figura simultaneamente como subscrito e como superscrito. Seguindo esta convenção, muitas vezes omite-se o sinal de somatório, estando subentendido a soma sempre

que um índice figura repetido. A esta convenção chama-se **convenção de Einstein**.

Daqui em diante, o nosso estudo incidirá sobre as formas diferenciais. Embora os outros objectos também seja importantes, as formas diferenciais desempenham um papel mais fundamental. A razão, é que estes são os objectos numa variedade que podem ser integrados, como veremos mais adiante.

Numa variedade M , vamos designar o espaço vectorial das formas diferenciais de grau k por $\Omega^k(M)$. Se fixarmos uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$, o elemento $\omega_p \in \wedge^k T_p^*M$ pode ser visto como uma aplicação multilinear alternada

$$\omega_p : T_p M \times \cdots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Assim, se $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ são campos vectoriais em M , obtemos uma função $\omega(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(M)$, dada por:

$$p \mapsto \omega_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p).$$

Desta maneira, toda a forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ pode ser vista como uma aplicação

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M).$$

Esta aplicação é $C^\infty(M)$ -multilinear e alternada. Reciprocamente, toda a aplicação $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$, que seja $C^\infty(M)$ -multilinear e alternada, define uma forma diferencial.

Vejamos algumas construções básicas envolvendo formas diferenciais.

Produto exterior de formas diferenciais. O produto exterior \wedge nas álgebras exteriores $\wedge T_p^*M$ induz um produto exterior de formas diferenciais

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{k+s}(M), \quad (\omega \wedge \eta)_p \equiv \omega_p \wedge \eta_p.$$

Se introduzirmos o conjunto de todas as formas diferenciais:

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^d \Omega^k(M).$$

onde $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$, o produto exterior faz de $\Omega(M)$ uma **álgebra de Grassmann** sobre o anel das funções $C^\infty(M)$, i.e., são válidas as seguintes propriedades:

- (a) $(f\omega + g\eta) \wedge \theta = f\omega \wedge \theta + g\eta \wedge \theta$.
- (b) $\omega \wedge \eta = (-1)^{\deg \omega \deg \eta} \eta \wedge \omega$.
- (c) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.

É claro que, se $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega^1(M)$ e $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, de acordo com a nossa convenção:

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k(X_1, \dots, X_k) = \det [\alpha_i(X_j)]_{i,j=1}^k.$$

Estas propriedades é tudo quanto precisamos de saber para calcular produtos exteriores, como ilustramos no seguinte exemplo.

EXEMPLO 13.4.

Em \mathbb{R}^4 , com coordenadas (x, y, z, w) , consideremos as formas de grau 2 dadas por $\omega = (x + w^2)dx \wedge dy + e^z dx \wedge dw + \cos x dy \wedge dz$ e $\eta = x dy \wedge dz - e^z dz \wedge dw$. Temos que:

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= -(x + w^2)e^z dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw + xe^z dx \wedge dw \wedge dy \wedge dz \\ &= -w^2 e^z dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw.\end{aligned}$$

Pull-back de formas diferenciais. Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades. Para cada $p \in M$, temos a aplicação linear

$$d_p \Phi : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N,$$

e a, ainda, a sua transposta:

$$(d_p \Phi)^* : \wedge^k T_{\Phi(p)}^* N \rightarrow \wedge^k T_p^* M.$$

Define-se o **pull-back** de formas diferenciais $\Phi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ por:

$$\begin{aligned}(\Phi^* \omega)(X_1, \dots, X_k)_p &= ((d_p \Phi)^* \omega)(X_1|_p, \dots, X_k|_p) \\ &= \omega(d_p \Phi \cdot X_1|_p, \dots, d_p \Phi \cdot X_k|_p).\end{aligned}$$

Como esta fórmula define uma aplicação $\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que é $C^\infty(M)$ -multilinear e alternada, $\Phi^* \omega$ é uma forma diferencial de grau k em M .

É fácil de ver que, para uma aplicação diferenciável $\Phi : M \rightarrow N$, o pull-back $\Phi^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ é um homomorfismo de álgebras de Grassman, i.e., são válidas as propriedades:

- (a) $\Phi^*(a\omega + b\eta) = a\Phi^*\omega + b\Phi^*\eta$;
- (b) $\Phi^*(\omega \wedge \eta) = \Phi^*\omega \wedge \Phi^*\eta$;
- (c) $\Phi^*(f\omega) = (f \circ \Phi)\Phi^*\omega$;

Note que se $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, então o seu diferencial df pode ser visto como uma forma diferencial de grau 1. Temos, ainda, que:

$$(d) \Phi^*(df) = d(f \circ \Phi).$$

Esta propriedades podem ser utilizadas para calcular pull-backs em coordenadas locais, como ilustramos de seguida.

EXEMPLO 13.5.

Seja $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação:

$$\Phi(u, v) = (u + v, u - v, v^2, \frac{1}{1 + u^2}).$$

Se $\eta = x dy \wedge dz - e^z dz \wedge dw \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$, então o seu pull-back é dado por:

$$\begin{aligned}\Phi^* \eta &= (x \circ \Phi)d(y \circ \Phi) \wedge d(z \circ \Phi) - e^{(z \circ \Phi)} d(z \circ \Phi) \wedge d(w \circ \Phi) \\ &= (u + v)d(u - v) \wedge d(v^2) - e^{v^2} d(v^2) \wedge d(\frac{1}{1 + u^2}) \\ &= (u + v)du \wedge 2vdv - 2ve^{v^2} dv \wedge \frac{-2udu}{(1 + u^2)^2} \\ &= \left(2v(u + v) - \frac{4uve^{v^2}}{(1 + u^2)^2} \right) du \wedge dv.\end{aligned}$$

Ou seja, para calcular o pull-back $\Phi^*\eta$, substituímos em η , as funções coordenadas (x, y, z, w) pelas suas expressões em termos das coordenadas (u, v) .

Observação 13.6. No caso em que (N, i) é uma subvariedade de M , o pull-back de uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$ pela inclusão $i : N \hookrightarrow M$ designa-se por **restrição** de ω a N . Muitas vezes, escrevemos ω em vez de $i^*\omega$, para designar a restrição.

Por exemplo, para a esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, podemos falar na forma diferencial

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$$

quando estamos de facto a pensar no seu pull-back pela inclusão $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Produto interior. Dado um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$, chama-se **produto interior** de ω por X à forma diferencial $i_X\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ definida por:

$$i_X\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

Como $i_X\omega$ é uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear e alternada, define, de facto, uma forma diferencial de grau $k - 1$ em M .

As seguintes propriedades do produto interior, de fácil verificação, são bastante úteis no seu cálculo:

- (a) $i_X(f\omega + g\theta) = fi_X\omega + gi_X\theta$.
- (b) $i_X(\omega \wedge \theta) = (i_X\omega) \wedge \theta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (i_X\theta)$.
- (c) $i_{(fX+gY)}\omega = fi_X\omega + gi_Y\omega$.
- (d) $i_X(df) = X(f)$;

Vejamos um exemplo simples.

EXEMPLO 13.7.

Seja $\omega = e^x dx \wedge dy + e^z dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, e $X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Então:

$$\begin{aligned} i_{\frac{\partial}{\partial x}}(dx \wedge dy) &= (i_{\frac{\partial}{\partial x}} dx) \wedge dy - dx \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial x}} dy) = dy, \\ i_{\frac{\partial}{\partial y}}(dx \wedge dy) &= (i_{\frac{\partial}{\partial y}} dx) \wedge dy - dx \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial y}} dy) = -dx, \\ i_{\frac{\partial}{\partial x}}(dy \wedge dz) &= (i_{\frac{\partial}{\partial x}} dy) \wedge dz - dy \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial x}} dz) = 0, \\ i_{\frac{\partial}{\partial y}}(dy \wedge dz) &= (i_{\frac{\partial}{\partial y}} dy) \wedge dz - dy \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial y}} dz) = dz. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$i_X\omega = -xe^x dx - ye^x dy + xe^z dz.$$

Observação 13.8. A operação de produto interior estende-se, de forma mais ou menos óbvia, a outros objectos (campos multivectoriais, campos tensoriais, etc.). Para estes objectos, é frequente utilizar-se a designação **contração**, em vez de produto interior. Por exemplo, pode-se definir a contração de uma forma diferencial ω de grau k por um campo multivectorial Π de grau $l < k$, obtendo-se uma forma $i_\Pi\omega$ de grau $k - l$. Em

coordenadas locais (U, x^1, \dots, x^d) , se

$$\omega|_U = \sum_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \Pi|_U = \sum_{j_1 \dots j_l} \Pi^{j_1 \dots j_l} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_l}},$$

então:

$$(i_\Pi \omega)|_U = \sum_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \Pi^{i_1 \dots i_l} dx^{i_{l+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Como uma aplicação muito simples de formas diferenciais, vejamos como podemos formalizar a noção de *orientação* de uma variedade.

Recordemos que se V é um espaço vectorial de dimensão d , e $\mu \in \wedge^d(V^*)$ é um elemento não-nulo, então para qualquer base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ temos

$$\mu(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d) \neq 0.$$

Assim, μ divide as bases ordenadas de V em duas classes: a base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ tem μ -orientação positiva (respectivamente, negativa) se este número é positivo (respectivamente, negativo). Assim, μ determina uma orientação para V .

Passando ao caso de uma variedade diferenciável M de dimensão d , vamos chamar **forma volume** a uma forma diferencial $\mu \in \Omega^d(M)$, tal que $\mu_p \neq 0$, $\forall p \in M$.

Definição 13.9. *Uma variedade M de dimensão d diz-se **orientável** se possui uma forma volume.*

Seja M é uma variedade orientável de dimensão d . Se $\mu_1, \mu_2 \in \Omega^d(M)$ são formas volumes, dizemos que μ_1 e μ_2 definem a mesma orientação se, para todo o $p \in M$ e qualquer base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ de $T_p M$, verifica-se:

$$\mu_1(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d) \mu_2(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d) > 0.$$

Caso contrário, dizemos que μ_1 e μ_2 definem orientações opostas. Observe que, se μ_1 e μ_2 definem a mesma orientação, então uma base é μ_1 -positiva sse é μ_2 -positiva. A propriedade “definem a mesma orientação” é uma relação de equivalência nas formas volumes de M . Uma **orientação** para M é uma escolha de uma classe de equivalência $[\mu]$. Uma vez escolhida uma orientação, dizemos que M é uma **variedade orientada**.

A seguinte proposição fornece uma caracterização alternativa das variedades orientáveis. A demonstração é deixada como exercício.

Proposição 13.10. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) M é orientável, i.e., M possui uma forma volume.
- (ii) Existe uma colecção $\{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ de sistemas de coordenadas que cobrem M tal que, para todo o $i, j \in I$:

$$\det[(\phi_i \circ \phi_j^{-1})'(p)] > 0, \quad \forall p \in U_i \cap U_j.$$

EXEMPLOS 13.11.

1. O espaço euclídeo \mathbb{R}^d é orientável. A orientação canónica de \mathbb{R}^d é a orientação definida pela forma volume $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d$. Em relação à orientação canónica, a base canónica de $T_p \mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$ tem orientação positiva.

2. Um grupo de Lie G é sempre orientável. Se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ é uma base de 1-formas diferenciais invariantes à esquerda, então $\mu = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_d$ é uma forma volume invariante à esquerda.

3. A esfera \mathbb{S}^d é um variedade orientável. Uma forma volume é dada por:

$$\omega = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^i x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{d+1} \in \Omega^d(\mathbb{S}^d).$$

Deixamos como exercício verificar que esta forma não se anula.

4. O espaço projectivo \mathbb{P}^2 não é orientável. De facto, seja $\mu \in \Omega^2(\mathbb{P}^2)$ uma 2-forma diferenciável. Se $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ é a aplicação quociente, então $\pi^*\mu$ é uma 2-forma diferencial em \mathbb{S}^2 . Segue-se, do exemplo anterior, que

$$\pi^*\mu = f\omega,$$

para alguma função $f \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$. Seja $\Phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação anti-podal: $p \mapsto -p$. Como $\pi \circ \Phi = \pi$, temos que:

$$\Phi^*(\pi^*\mu) = (\pi \circ \Phi)^*\mu = \pi^*\mu.$$

Por outro lado, é fácil de ver que $\Phi^*\omega = -\omega$, logo

$$\begin{aligned} f\omega &= \pi^*\mu \\ &= \Phi^*(\pi^*\mu) \\ &= \Phi^*(f\omega) \\ &= (f \circ \Phi)\Phi^*(\omega) = -(f \circ \Phi)\omega. \end{aligned}$$

Concluimos que $f(-p) = -f(p)$, para todo o $p \in \mathbb{S}^2$. Mas, então, $f(p) = 0$, para algum $p \in \mathbb{S}^2$. Assim, $\pi^*\mu$ anula-se. Como π é um difeomorfismo local, concluimos que toda a forma diferencial $\mu \in \Omega^2(\mathbb{P}^2)$ anula-se, logo \mathbb{P}^2 não é orientável.

Sejam M e N variedades orientadas com orientações $[\mu_M]$ e $[\mu_N]$, e seja $\Phi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Dizemos que Φ **preserva orientações** ou é **positiva**, se $[\Phi^*\mu_N] = [\mu_M]$. A demonstração da seguinte proposição é deixada como exercício.

Proposição 13.12. *Seja M uma variedade orientada com orientação $[\mu]$. Existe uma cobertura aberta de M por sistemas de coordenadas (U_i, ϕ_i) em que cada $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ é positivo, onde em \mathbb{R}^d consideramos a orientação canónica.*

EXERCÍCIOS.

1. Construa a estrutura diferencial natural de $\wedge^k T^*M$, para a qual a projecção canónica em M é uma submersão.

2. Determine as fórmulas de transformação de coordenadas para campos multivectoriais e tensoriais.

3. Mostre que uma estrutura Riemanniana numa variedade M (ver Lição 7, Exercício 8) define um campo tensorial simétrico de grau (0,2).

NOTA: Em coordenadas locais (U, x^i) , um tensor simétrico de grau (0,2)

escreve-se na forma

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

onde as componentes satisfazem $g_{ij} = g_{ji}$.

4. Verifique as propriedades básicas do pull-back de formas diferenciais e do produto interior.

5. Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Mostre que, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ são campos vectoriais Φ -relacionados, então

$$\Phi^*(i_Y \omega) = i_X \Phi^* \omega,$$

para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega(N)$.

6. Demonstre a Proposição 13.10.

7. Mostre que, se M e N são variedades orientáveis, então $M \times N$ é orientável. Conclua que o toro \mathbb{T}^d é uma variedade orientável.

8. Mostre que o espaço projectivo \mathbb{P}^d é orientável sse d é ímpar.

9. Verifique que a garrafa de Klein (ver Exemplo 4.5.4) não é uma variedade orientável.

10. Mostre que toda a variedade orientada M possui uma cobertura por sistemas de coordenadas positivos.

11. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão d . Mostre que:

(a) O produto interno em cada espaço tangente $T_p M$ induz um produto interno no espaço cotangente $T_p^* M$.

(b) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e campos vectoriais $X_1, \dots, X_d \in \mathfrak{X}(U)$ que são ortonormados:

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij} \text{ símbolo de Kronecker.}$$

A colecção X_1, \dots, X_d diz-se um **campo de referenciais (local) ortonormado**.

(c) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e formas diferenciais $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \Omega^1(U)$ que são ortonormadas:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij} \text{ símbolo de Kronecker.}$$

A colecção $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ diz-se um **campo de co-referenciais (local) ortonormado**.

12. Seja M uma variedade Riemanniana orientada de dimensão d . Mostre que existe uma única operação $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{d-k}(M)$ que pode ser caracterizada da seguinte forma: para todo o campo co-referencial local ortonormado $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ e positivo (i.e., $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_d$ é positiva) são satisfeitas as seguintes propriedades:

(a) $*1 = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_d$ e $*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_d) = 1$;

(b) $*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) = \alpha_{k+1} \wedge \dots \wedge \alpha_d$.

A $*$ chama-se **operador estrela de Hodge**. Mostre, ainda, que:

$$**\omega = (-1)^{k(d-k)}\omega, \text{ onde } k = \deg \omega.$$

LIÇÃO 14. DIFERENCIAL E CÁLCULO DE CARTAN

Nesta lição vamos definir duas operações de diferenciação sobre as formas diferenciais: o *diferencial* de formas diferenciais (uma derivada intrínseca) e a *derivada de Lie* de formas diferenciais (uma derivada ao longo de campos vectoriais). Estas operações, em conjunto com as operações algébricas elementares estudadas na lição anterior, definem um cálculo sobre as formas diferenciais que se costuma designar por *Cálculo de Cartan*.

Seja $\omega \in \Omega^k(M)$ uma forma diferencial de grau k numa variedade diferencial M . Definimos o seu **diferencial** $d\omega$ como sendo a forma diferencial de grau $k + 1$ dada por:

$$(14.1) \quad d\omega(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) + \sum_{i < j}^k (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k),$$

para todo os campos vectoriais $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Como esta fórmula define uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear $\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, vemos que $d\omega$ é, de facto, uma forma diferencial.

Note que uma função $f \in C^\infty(M)$ é uma forma de grau 0. Neste caso, a fórmula fornece:

$$df(X) = X(f),$$

donde esta definição é coerente com a nossa definição de diferencial de uma função. O próximo resultado mostra que o diferencial é a única operação sobre as formas que é uma extensão razoável do diferencial de funções.

Teorema 14.1. *O diferencial é a única operação*

$$d : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) d é \mathbb{R} -linear:

$$d(a\omega + b\theta) = ad\omega + bd\theta.$$

(ii) d é uma derivação:

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (d\theta).$$

(iii) d é uma extensão do diferencial: se $f \in C^\infty(M)$, então

$$df(X) = X(f), \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

(iv) $d^2 = 0$.

Demonstração. Deixamos como exercício a verificação de que d , definido por (14.1), satisfaz as propriedades (i) a (iv). Para verificar a unicidade, vamos ver que se $\omega \in \Omega^k(M)$ é uma forma diferencial de grau k , então $d\omega$ fica determinado pelas propriedades (i) a (iv).

Como d é uma derivação, é local: se $\omega|_U = 0$ num aberto U , então $(d\omega)|_U = 0$. De facto, se $p \in U$, seja $f \in C^\infty(M)$ uma função com $f(p) > 0$ e $\text{sup } f \subset U$. Como $f\omega \equiv 0$, temos que:

$$0 = d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega.$$

Calculando ambos os lados em p , obtemos $f(p)(d\omega)_p = 0$. Logo $d\omega|_U = 0$, como pretendido.

Basta, pois, verificar a nossa afirmação para $\omega \in \Omega^k(U)$, onde U é um sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^d) . Nesse caso, temos que

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Aplicando, sucessivamente, as propriedades, obtemos:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) && \text{(por (i))} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} && \text{(por (ii) e (iv))} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_i \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} && \text{(por (iii)).} \end{aligned}$$

Esta última expressão define uma forma diferencial de grau $k+1$ em U . Assim, $d\omega$ fica determinado pelas propriedades (i) a (iv), tal como afirmámos. \square

O cálculo do diferencial de uma forma pode ser efectuado recorrendo às propriedades dadas pelo resultado anterior. Isto é, muitas vezes, mais eficiente do que a aplicação directa da fórmula (14.1), como ilustramos de seguida, através de um exemplo muito simples.

EXEMPLO 14.2.

Seja $\omega = e^y dx \wedge dz + e^z dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Então, aplicando sucessivamente as propriedades (i) a (iv), obtemos:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(e^y dx \wedge dz + e^z dy \wedge dz) \\ &= (de^y) \wedge dx \wedge dz + d(e^z) \wedge dy \wedge dz \\ &= e^y dy \wedge dx \wedge dz + e^z dz \wedge dy \wedge dz \\ &= -e^y dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Deve-se, ainda, observar que o diferencial é preservado pelo pull-back de aplicações diferenciáveis:

Proposição 14.3. *Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis. Então, para toda a forma $\omega \in \Omega^k(M)$, temos que:*

$$\Phi^* d\omega = d\Phi^* \omega.$$

Como veremos mais adiante, esta propriedade muito simples é extremamente importante. A demonstração é deixada como exercício.

Como uma aplicação simples, mas interessante, da noção de diferencial vejamos como o Teorema de Frobenius pode ser expresso em termos de formas diferenciais. Para isso, seja D uma distribuição de classe C^∞ numa variedade diferenciável M . Dizemos que uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ **aniquila** D se:

$$\omega(X_1, \dots, X_k) = 0 \quad \text{sempre que } X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(D).$$

Utilizaremos a notação:

$$I(D) \equiv \{\omega \in \Omega(M) : \omega \text{ aniquila } D\}.$$

Vamos, ainda, dizer que uma colecção de 1-formas diferenciais $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega^1(M)$ é **independente** se elas formam um conjunto linearmente independente em T_p^*M , para cada $p \in M$.

A proposição seguinte mostra que uma distribuição pode ser definida em termos de formas diferenciáveis.

Proposição 14.4. *Seja D uma distribuição k -dimensional de classe C^∞ numa variedade diferenciável M de dimensão d . Então:*

- (i) $I(D)$ é um ideal da álgebra Grassmanniana $\Omega(M)$.
- (ii) $I(D)$ é localmente gerado por $d - k$ 1-formas independentes.

Reciprocamente, se $I \subset \Omega(M)$ é um ideal que é localmente gerado por $d - k$ formas diferenciais de grau 1, então existe uma única distribuição D , que é k -dimensional e de classe C^∞ , tal que $I = I(D)$.

Demonstração. O item (i) segue-se, imediatamente, das definições de $I(D)$ e do produto exterior.

Para mostrar (ii), para cada $p \in M$, consideramos uma vizinhança U de p e campos vectoriais $X_{d-k+1}, \dots, X_d \in \mathfrak{X}(U)$ que geram $D|_U$. Podemos completar esta colecção com campos vectoriais, obtendo campos vectoriais $X_1, \dots, X_d \in \mathfrak{X}(U)$, que formam uma base de T_pM , para todo o $p \in U$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \Omega^1(U)$ as 1-formas duais, definidas por:

$$\alpha_i(X_j) = \delta_{ij} \text{ (símbolo de Kronecker).}$$

Vejamos que $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são as 1-formas diferenciais que procurávamos:

- A colecção $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ é independente: Isto segue-se, imediatamente, do facto de que $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ formam uma base de T_p^*M , para todo o $p \in U$.
- A colecção $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ é geradora: Se $\omega \in \Omega^r(M)$, então existem funções $a_{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(U)$ tais que

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq d} a_{i_1 \dots i_r} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_r}.$$

Se $\omega \in I(D)$, calculando ambos os termos em X_{d-k+1}, \dots, X_d , vemos que $a_{i_1 \dots i_r} = 0$ sempre que $i_j \geq k$. Logo,

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} a_{i_1 \dots i_r} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_r},$$

e, portanto, a colecção $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ é geradora.

Finalmente, para demonstrar o recíproco, dado $p \in M$, sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 1-formas que geram o ideal I numa vizinhança U de p . Definimos D_p como sendo o subespaço de T_pM cujo aniquilador é o subespaço de T_p^*M gerado pelas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. É fácil de ver que D é uma distribuição C^∞ em M , k -dimensional, e tal que $I = I(D)$. A unicidade de D segue-se do facto de que, se $D_1 \neq D_2$, então $I(D_1) \neq I(D_2)$. \square

Um **ideal diferencial** é um ideal $I \subset \Omega(M)$ que é fechado para a diferenciação:

$$\omega \in I \implies d\omega \in I.$$

Temos a seguinte proposição:

Proposição 14.5. *Uma distribuição D de classe C^∞ é involutiva sse $I(D)$ é um ideal diferencial.*

Demonstração. A relação (14.1) mostra que se D é involutiva então $I(D)$ é um ideal diferencial. Por outro lado, seja $I(D)$ um ideal diferencial. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$, então a mesma relação mostra que

$$\omega([X, Y]) = -d\omega(X, Y) + X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) = 0,$$

para toda a 1-forma $\omega \in I(D)$. Segue-se que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(D)$, logo D é involutiva. \square

Como corolário, obtemos a seguinte versão do Teorema de Frobenius:

Teorema 14.6 (Frobenius). *Uma distribuição D é integrável sse $I(D)$ é um ideal diferencial.*

EXEMPLO 14.7.

Seja $\omega \in \Omega^1(M)$ uma 1-forma diferencial que não se anula. Então ω define uma distribuição C^∞ de codimensão 1. Pelo teorema, esta distribuição é integrável sse

$$d\omega = \eta \wedge \omega,$$

para alguma 1-forma $\eta \in \Omega^1(M)$.

A operação $d : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(M)$ também é conhecida como *diferenciação exterior*, pois aumenta o grau das formas diferenciais. Vejamos, agora, um outro tipo de diferenciação de formas diferenciais que preserva o grau:

Definição 14.8. *Chama-se **derivada de Lie** de $\omega \in \Omega^k(M)$ ao longo do campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ à forma diferencial $\mathcal{L}_X\omega \in \Omega^k(M)$ definida por:*

$$\mathcal{L}_X\omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\phi_X^t)^*\omega - \omega).$$

Algumas propriedades básicas da derivada de Lie de formas diferenciais são dadas pela seguinte proposição, cuja demonstração é deixada como exercício:

Proposição 14.9. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial. A derivada de Lie $\mathcal{L}_X : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ satisfaz:*

- (i) $\mathcal{L}_X(a\omega + b\eta) = a\mathcal{L}_X\omega + b\mathcal{L}_X\eta.$
- (ii) $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta.$
- (iii) $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$, se $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M).$
- (iv) $\mathcal{L}_Xd\omega = d\mathcal{L}_X\omega.$

Veremos, ainda, outras propriedades nos exercícios no final desta lição.

Tal como no caso do diferencial, o cálculo da derivada de Lie de uma forma pode ser efectuado recorrendo às suas propriedades e, muitas vezes, isto é mais eficiente do que a aplicação directa da definição. Ilustramos com um exemplo.

EXEMPLO 14.10.

Seja $\omega = e^x dx \wedge dy + e^y dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, e $X = x \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega &= \mathcal{L}_X(e^x dx \wedge dy + e^y dy \wedge dz) \\ &= e^x dx \wedge dX(y) + X(e^y) dy \wedge dz + e^y dX(y) \wedge dz \\ &= e^x dx \wedge dx + xe^y dy \wedge dz + e^y dx \wedge dz \\ &= xe^y dy \wedge dz + e^y dx \wedge dz. \end{aligned}$$

Existe uma outra forma para calcular a derivada de Lie. De facto, existe uma fórmula que relaciona a derivada de Lie, o diferencial e o produto interior. Esta fórmula desempenha, muitas vezes de forma inesperada, um papel crucial. Por isso, merece um destaque especial.

Teorema 14.11 (Fórmula mágica de Cartan). *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial e $\omega \in \Omega(M)$ uma forma diferencial. Então:*

$$(14.2) \quad \mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + di_X \omega.$$

Demonstração. Pela Proposição 14.9 (iii), sabemos que $\mathcal{L}_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ é uma derivação. Por outro lado, pelas propriedades de d e i_X , vemos que $i_X d + di_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ também é uma derivação. Assim, basta verificar que estas duas derivações tomam o mesmo valor na forma diferencial $\omega = fdg$, onde $f, g \in C^\infty(M)$.

Por um lado, utilizando as propriedades dadas pela Proposição 14.9, calculamos:

$$\mathcal{L}_X(fdg) = X(f)dg + fd(X(g)).$$

Por outro lado, as propriedades de d e i_X fornecem:

$$\begin{aligned} i_X d(fdg) + di_X(fdg) &= i_X(df \wedge dg) + d(fi_X dg) \\ &= X(f)dg - X(g)df + d(fX(g)) \\ &= X(f)dg + fd(X(g)). \end{aligned}$$

□

EXERCÍCIOS.

1. Verifique que d , definido pela fórmula (14.1), satisfaz as propriedades (i) a (iv) do Teorema 14.1.
2. Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis. Mostre que, para toda a forma $\omega \in \Omega^k(M)$, verifica-se

$$\Phi^* d\omega = d\Phi^* \omega.$$

3. Seja $I \subset \Omega(M)$ um ideal que é gerado por k formas diferenciais de grau 1 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
 - (a) I é um ideal diferencial;
 - (b) $d\alpha_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \alpha_j$, para algumas 1-formas $\omega_{ij} \in \Omega(M)$;
 - (c) Se $\omega = \alpha_1 \dots \alpha_k$, então $d\omega = \alpha \wedge \omega$, para alguma 1-forma $\alpha \in \Omega(M)$.
4. Verifique as propriedades da derivada de Lie dadas pela Proposição 14.9

5. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais e $\omega \in \Omega(M)$ uma forma diferencial. Mostre que:

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}\omega = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\omega) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\omega).$$

6. Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Mostre que, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ são campos vectoriais Φ -relacionados, então

$$\Phi^*(\mathcal{L}_Y\omega) = \mathcal{L}_X(\Phi^*\omega),$$

para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega(N)$.

7. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$. Mostre a seguinte relação entre as derivadas de Lie:

$$(14.3) \quad \mathcal{L}_X(\omega(X_1, \dots, X_k)) = \mathcal{L}_X\omega(X_1, \dots, X_k) + \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, \mathcal{L}_X X_i, \dots, X_k).$$

8. Seja M uma variedade Riemanniana orientada. Se $\mathbf{v} \in T_p M$ designe por $\mathbf{v}^\sharp \in T^*M$ o elemento definido $\mathbf{v}^\sharp(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. A aplicação $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^\sharp$ é um isomorfismo e designamos a sua inversa, também, por $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$. O **gradiente** de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vectorial $\text{grad } f \in \mathfrak{X}(M)$ definido por:

$$\text{grad } f \equiv (df)^\sharp.$$

A **divergência** de um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é a função $\text{div } X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\text{div } X \equiv *d * X.$$

O **laplaciano** de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a função $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\Delta = -\text{div}(\text{grad } f).$$

Para $M = \mathbb{R}^3$ com a estrutura Riemanniana usual, calcule o gradiente, a divergência e o laplaciano em coordenadas cilíndricas e esféricas.

9. Para uma variedade M designe por $\mathfrak{X}^k(M)$ o espaço vectorial dos campos multivectoriais de grau k . Mostre que existe uma única operação \mathbb{R} -bilinear $[\ , \] : \mathfrak{X}^k(M) \times \mathfrak{X}^s(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{k+s}(M)$ que para $k = s = 1$ coincide com o parênteses de Lie, e satisfaz:

$$(a) [P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P];$$

$$(b) [P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{q(p+1)} Q \wedge [P, R];$$

Verifique, ainda, que esta operação satisfaz a identidade de Jacobi:

$$(-1)^{p(r-1)}[P, [Q, R]] + (-1)^{q(p-1)}[Q, [R, P]] + (-1)^{r(q-1)}[R, [P, Q]] = 0.$$

Em todas estas identidades, $p = \text{deg } P$, $q = \text{deg } Q$ e $r = \text{deg } R$.

NOTA: Esta operação é conhecida pelo nome de *parênteses de Schouten* e é o análogo, para campos multivectoriais, do diferencial de formas diferenciais. É um exemplo de um super-parênteses de Lie.

LIÇÃO 15. INTEGRAÇÃO EM VARIEDADES

Vamos agora definir o integral de uma d -forma sobre uma d -variedade orientada.

Começemos por considerar o caso $M = \mathbb{R}^d$, em que fixamos a orientação canónica. Se $U \subset \mathbb{R}^d$ é um aberto, então toda a forma diferencial $\omega \in \Omega^d(U)$ é da forma:

$$\omega = f \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d,$$

para alguma função $f \in C^\infty(U)$. Dizemos que ω é integrável em U e definimos o seu integral por:

$$\int_U \omega = \int_A f(x^1, \dots, x^d) dx^1 \cdots dx^d,$$

desde que o integral do lado direito exista.

A fórmula de mudança de variável para o integral em \mathbb{R}^d fornece o seguinte lema:

Lema 15.1. *Seja $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ um difeomorfismo definido num aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^d$. Se ω é uma forma diferencial integrável em $\Phi(U)$, então $\Phi^*\omega$ é integrável em U e*

$$\int_{\Phi(U)} \omega = \pm \int_U \Phi^*\omega,$$

onde o \pm é o sinal do determinante da matriz jacobiana $\Phi'(p)$.

Assim, desde que consideremos difeomorfismos que preservem a orientação, o integral é invariante por difeomorfismos. Por esta razão, vamos considerar o integral de formas diferenciais apenas sobre variedades *orientadas*. Devese, no entanto, observar que é possível definir o integral sobre variedades não orientadas mas, para isso, é preciso considerar **formas diferenciais ímpares**, que generalizam as formas diferenciais pares que temos vindo a considerar.

Uma outra simplificação, a fim de evitar questões de convergência, consiste em considerar, apenas, formas diferenciais $\omega \in \Omega_c^k(M)$ cujo suporte

$$\text{sup } \omega = \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}},$$

é compacto. Vamos designar por $\Omega_c^k(M)$ as formas diferenciais de grau k com suporte compacto.

Seja agora M uma variedade orientada de dimensão d e seja $\omega \in \Omega_c^d(M)$ uma forma diferencial com suporte compacto. Definimos o seu integral sobre M da seguinte forma:

- Se $\text{sup } \omega \subset U$, onde (U, ϕ) é um sistema de coordenadas positivo, então definimos:

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega.$$

- Em geral, consideramos uma cobertura por sistemas de coordenadas (U_α, ϕ_α) positivos, e uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a esta cobertura, e definimos:

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega.$$

Note que esta soma é finita, pois $\text{sup } \omega$ é compacto. Note, ainda, que esta receita fornece formas distintas de calcular o integral de uma forma com suporte num domínio de coordenadas. No entanto, é simples verificar que o resultado é o mesmo. Pode-se, também, mostrar que a definição é independente da partição da unidade e da cobertura utilizadas. Deixamos a verificação destes detalhes ao cuidado do leitor.

É fácil verificar, a partir da definição, que o integral satisfaz as seguintes propriedades básicas:

(a) *Linearidade*: Se $\omega, \eta \in \Omega_c^d(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então:

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta.$$

(b) *Aditividade*: Se $M = M_1 \cup M_2$, e $\omega \in \Omega_c^d(M)$, então:

$$\int_M \omega = \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega,$$

desde que $M_1 \cap M_2$ possua medida nula.

Temos ainda:

Teorema 15.2 (Fórmula de Mudança de Variável). *Sejam M e N variedades orientadas de dimensão d e $\Phi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo que preserva orientações. Então, para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega_c^d(N)$,*

$$\int_N \omega = \int_M \Phi^* \omega.$$

Demonstração. Como Φ é um difeomorfismo e preserva orientações, podemos encontrar uma cobertura de M por sistemas de coordenadas (U_α, ϕ_α) positivos, tal que os $\Phi(U_\alpha)$ são domínios de sistemas coordenadas positivos $\psi_\alpha : \Phi(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^d$ de N . Se $\{\rho_\alpha\}$ é uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a esta cobertura, então $\{\rho_\alpha \circ \Phi\}$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$. Pelo Lema 15.1, temos que

$$\int_{\Phi(U_\alpha)} \rho_\alpha \omega = \int_{U_\alpha} \Phi^*(\rho_\alpha \omega) = \int_{U_\alpha} (\rho_\alpha \circ \Phi) \Phi^* \omega.$$

Logo, vemos que:

$$\begin{aligned} \int_N \omega &= \sum_\alpha \int_N \rho_\alpha \omega \\ &= \sum_\alpha \int_{\Phi(U_\alpha)} \rho_\alpha \omega \\ &= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (\rho_\alpha \circ \Phi) \Phi^* \omega \\ &= \sum_\alpha \int_M (\rho_\alpha \circ \Phi) \Phi^* \omega = \int_M \Phi^* \omega. \end{aligned}$$

□

O cálculo do integral de formas diferenciais a partir da definição não é prático, pois envolve partições da unidade. O seguinte resultado é útil para simplificar os cálculos e evitar a utilização de partições da unidade:

Proposição 15.3. *Seja M uma variedade orientada de dimensão d e $C \subset M$ um conjunto fechado de medida nula. Para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega_c^d(N)$, temos que:*

$$\int_M \omega = \int_{M-C} \omega.$$

Demonstração. Mais uma vez, a demonstração consiste em utilizar uma partição da unidade para reduzir ao caso em que M é um aberto de \mathbb{R}^d . Para um aberto $U \subset \mathbb{R}^d$, o resultado reduz-se à igualdade:

$$\int_U f dx^1 \dots dx^d = \int_{U-C} f dx^1 \dots dx^d,$$

onde $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável. Este resultado verifica-se pois C tem medida nula. O leitor deverá verificar os detalhes. \square

EXEMPLO 15.4.

Seja $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ a esfera de dimensão 2. Consideremos a forma diferencial $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ definida por:

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

A forma $\mu = i^* \omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ não se anula e define uma orientação para \mathbb{S}^2 . Pela proposição, temos que:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mu = \int_{\mathbb{S}^2 - p} \mu,$$

para qualquer $p \in \mathbb{S}^2$. Tomemos, por exemplo, $p = N$ o pólo norte. A projecção estereográfica em relação a N define uma carta global $\pi_N : \mathbb{S}^2 - N \rightarrow \mathbb{R}^2$, cuja inversa é a parametrização:

$$\pi_N^{-1}(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1} (2u, 2v, u^2 + v^2 - 1).$$

Temos que:

$$(\pi_N^{-1})^* i^* \omega = (i \circ \pi_N^{-1})^* \omega = -\frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} du \wedge dv.$$

Isto mostra que π_N é um sistema de coordenadas negativo. Concluimos que:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mu = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} du \wedge dv.$$

Este último integral pode ser calculado mudando para coordenadas polares, obtendo-se:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mu = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{4r}{(r^2 + 1)^2} d\theta dr = 4\pi$$

O nosso próximo objectivo é generalizar o Teorema de Stokes a formas diferenciais. Para isso, precisamos de formalizar a noção de *variedade com bordo*.

Seja $H^d = \{(x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d : x^d \geq 0\}$ o semi-plano superior. Vamos relaxar a definição de estrutura diferenciável permitindo que as nossas cartas $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ sejam homeomorfismos de um aberto $U \subset M$ num aberto $\phi(U) \subset H^d$. Uma **variedade com bordo** é um espaço topológico com uma estrutura diferenciável, neste sentido mais geral. Esta definição inclui as variedades que temos vindo a considerar, pois podemos assumir que, nesse caso, as cartas tomam valores no interior de H^d , e este é difeomorfo a \mathbb{R}^d .

Um ponto $p \in M$ de uma variedade com bordo diz-se um **ponto do bordo** se para algum sistema de coordenadas $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^d)$ temos que $x^d(p) = 0$. Note que esta condição é independente do sistema de coordenadas. Ao conjunto dos pontos do bordo chama-se **bordo** de M e designa-se

por ∂M . Se $\partial M = \emptyset$, dizemos que M é um **variedade sem bordo** e estas correspondem, precisamente, às variedades que considerámos anteriormente.

Proposição 15.5. *Seja M uma variedade com bordo de dimensão d . Então ∂M e $M - \partial M$ são variedades sem bordo de dimensão $d - 1$ e d , respectivamente.*

A demonstração é um exercício simples.

Todos os objectos que introduzimos para variedades sem bordo podem, igualmente, ser definidos para variedades com bordo. Podemos, por exemplo, falar de fibrado tangente e cotangente, campos vectoriais, formas diferenciais, etc. De hora em diante, vamos utilizar estes conceitos sem mais observações.

Seja M uma variedade com bordo e $p \in \partial M$ um ponto do bordo: $p \in \partial M$. Por um lado, temos o espaço tangente $T_p M$, que tem dimensão d , e por outro, temos o espaço tangente $T_p \partial M$ que tem dimensão $d - 1$. É claro que $T_p \partial M$ é um subespaço linear de $T_p M$. Em coordenadas locais (U, x^1, \dots, x^d) , um vector $\mathbf{v} \in T_p M$ escreve-se na forma

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Os vectores tangentes que pertencem a $T_p \partial M$ são, exactamente, os vectores com a última coordenada nula: $v^d = 0$. Um vector tangente diz-se EXTERIOR a ∂M se $v^d < 0$. Esta condição é independente do sistema de coordenadas.

Seja M uma variedade com bordo orientada. A orientação $[\mu_M]$ de M induz uma orientação $[\mu_{\partial M}]$ de ∂M da seguinte forma: se $p \in \partial M$, uma orientação positiva de $T_p \partial M$ é, por definição, $[i_{\mathbf{v}} \mu_p]$ onde $\mathbf{v} \in T_p M$ é um vector exterior a ∂M . É fácil de ver que esta definição é independente da escolha de vector exterior. Daqui em diante, se M é uma variedade com bordo orientada, vamos considerar em ∂M a orientação induzida desta forma.

Teorema 15.6 (Stokes). *Seja M uma variedade com bordo, orientada, de dimensão d . Se $\omega \in \Omega_c^{d-1}(M)$ é uma forma com suporte compacto, então:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demonstração. Consideramos, primeiro, dois casos especiais.

Caso $M = \mathbb{R}^d$: Pela linearidade do integral, podemos assumir que $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{d-1}$. Temos que:

$$d\omega = (-1)^{d-1} \frac{\partial f}{\partial x^d} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d.$$

Pelo Teorema de Fubini, obtemos:

$$\int_M d\omega = (-1)^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x^d} dx^d \right) dx^1 \dots dx^{d-1} = 0.$$

pois f é uma função com suporte compacto. Como $\partial \mathbb{R}^d = \emptyset$, o Teorema de Stokes é válido para \mathbb{R}^d .

Caso $M = H^d$: Neste caso, podemos escrever:

$$\omega = \sum_{i=1}^d f_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^d,$$

logo:

$$d\omega = \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d,$$

Para $i \neq d$, por um cálculo análogo ao caso anterior, obtemos:

$$\int_{H^d} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = 0.$$

Para $i = d$, calculamos:

$$\begin{aligned} (-1)^{d-1} \int_{H^d} \frac{\partial f_d}{\partial x^d} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d &= \\ &= (-1)^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_d}{\partial x^d} dx^d \right) dx^1 \cdots dx^{d-1} \\ &= (-1)^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_d(x^1, \dots, x^{d-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{d-1}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$\int_{H^d} d\omega = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_d(x^1, \dots, x^{d-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{d-1}.$$

Por outro lado, $\partial H^d = \{(x^1, \dots, x^d) : x^d = 0\}$, logo

$$\int_{\partial H^d} \omega = \int_{\partial H^d} f_d(x^1, \dots, x^{d-1}, 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{d-1}.$$

Em H^d tomamos a orientação canônica $[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d]$. A orientação induzida em $\partial H^d = \mathbb{R}^{d-1}$ é dada por $[(-1)^d dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{d-1}]$ (exercício), e concluímos que:

$$\int_{\partial H^d} \omega = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_d(x^1, \dots, x^{d-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{d-1}.$$

Assim, o teorema também é válido neste caso.

Vejamos, agora, o caso geral de uma variedade de dimensão d . Fixemos uma cobertura de M por sistemas de coordenadas (U_α, ϕ_α) positivos, e seja $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. As formas $\rho_\alpha \omega$ tem suporte contido em U_α , e este suporte é compacto pois é um subconjunto fechado dum conjunto compacto:

$$\text{sup } \rho_\alpha \omega \subset \text{sup } \rho_\alpha \cap \text{sup } \omega.$$

Como cada U_α é difeomorfo a \mathbb{R}^d ou a H^d , já sabemos que:

$$\int_{U_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) = \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$

Pela linearidade e aditividade do integral, concluímos que:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{\alpha} \int_M d(\rho_{\alpha}\omega) \\ &= \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} d(\rho_{\alpha}\omega) \\ &= \sum_{\alpha} \int_{\partial U_{\alpha}} \rho_{\alpha}\omega \\ &= \int_{\partial M} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}\omega = \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

□

Corolário 15.7. *Seja M uma variedade compacta, orientada, de dimensão d . Para toda a forma $\omega \in \Omega^{d-1}(M)$, temos que:*

$$\int_M d\omega = 0.$$

EXERCÍCIOS.

1. Mostre que o integral de formas diferenciais satisfaz as seguintes propriedades básicas:

(a) *Linearidade:* Se $\omega, \eta \in \Omega_c^d(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então:

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a \int_M \omega + b \int_M \eta.$$

(b) *Aditividade:* Se $M = M_1 \cup M_2$, e $\omega \in \Omega_c^d(M)$, então:

$$\int_M \omega = \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega,$$

desde que $M_1 \cap M_2$ possua medida nula.

2. Mostre que, se em H^d tomarmos a orientação $[dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d]$, então a orientação induzida em $\partial H^d = \mathbb{R}^{d-1}$ é dada por $[(-1)^d dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{d-1}]$

3. Considere o 2-toro T^2 como a subvariedade mergulhada de \mathbb{R}^4 :

$$T^2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 1\}.$$

Seja ainda ω o pull-back da forma $dx \wedge dz \in \Omega^2(M)$ para T^2 . Para uma orientação à sua escolha, calcule $\int_{T^2} \omega$.

4. Seja M uma variedade Riemanniana orientada, com bordo. Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com suporte compacto define-se o integral de f sobre M por:

$$\int_M f \equiv \int_M * \omega.$$

Se X é um campo vectorial, demonstre o **Teorema da Divergência**:

$$\int_M \operatorname{div} X = \int_{\partial M} X \cdot n,$$

onde $n : \partial M \rightarrow T_{\partial M}M$ é a normal exterior unitária ao longo de ∂M .

5. Seja M uma variedade Riemanniana orientada, com bordo. Para uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ designe por $\frac{\partial f}{\partial n}$ a função $n(f) : \partial M \rightarrow \mathbb{R}$, onde n é a normal exterior unitária ao longo de ∂M . Verifique as seguintes duas identidades de Green:

$$\int_{\partial M} f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle - \int_M f \Delta g,$$

$$\int_{\partial M} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \int_M (g \Delta f - f \Delta g),$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$.

6. Seja G um grupo de Lie de dimensão d .

(a) Mostre que se $\omega, \omega' \in \Omega^d(M)$ são formas diferenciais invariantes à esquerda e $[\omega] = [\omega']$, então existe um real $a > 0$ tal que:

$$\int_G f \omega = a \int_G f \omega', \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Fixe uma orientação μ para G e uma forma diferencial $\omega \in \Omega^d(M)$ invariante à esquerda tal que $\mu = [\omega]$. Defina o integral de uma função $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\int_G f \equiv \int_G f \omega.$$

(b) Mostre que o integral é invariante por translações à esquerda, i.e., para todo o $g \in G$, é válida a identidade

$$\int_G f \circ L_g = \int_G f.$$

(c) Dê um exemplo de um grupo de Lie em que o integral não é invariante à direita.

Para cada $g \in G$, a forma diferencial $R_g^* \omega$ é invariante à esquerda, logo

$$R_g^* \omega = \tilde{\lambda}(g) \omega,$$

para uma função $\tilde{\lambda} : G \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, define-se a **função modular** $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ por: $\lambda(g) = |\tilde{\lambda}(g)|$.

(d) Mostre que o integral é invariante à direita sse G é **unimodular**, i.e., $\lambda \equiv 1$.

(e) Mostre que um grupo de Lie compacto é unimodular.

7. Seja G um grupo de Lie compacto e $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ um representação de G . Mostre que existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V em relação ao qual esta representação é por transformações ortogonais:

$$\langle \Phi(g) \cdot \mathbf{v}, \Phi(g) \cdot \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall g \in G.$$

(SUGESTÃO: Utilize o facto de que um grupo de Lie compacto é unimodular.)

8. Seja G um grupo de Lie compacto. Mostre que G possui uma estrutura Riemanniana bi-invariante, i.e., invariante por translações à esquerda e à direita.

(SUGESTÃO: Uma estrutura Riemanniana em G , invariante à esquerda, é invariante à direita sse o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzido em $\mathfrak{g} \simeq T_e G$ satisfaz:

$$\langle \text{Ad}(g) \cdot X, \text{Ad}(g) \cdot Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall g \in G, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

LIÇÃO 16. COHOMOLOGIA DE DE RHAM

O facto de que o diferencial exterior satisfaz $d^2 = 0$ tem consequências muito profundas, como iremos ver nesta e nas próximas lições.

Definição 16.1. *Seja $\omega \in \Omega^k(M)$ uma forma diferencial.*

- (i) *Diz-se que ω é uma **forma fechada** se $d\omega = 0$.*
- (ii) *Diz-se que ω é uma **forma exacta** se $\omega = d\eta$, para alguma forma $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$.*

Designamos por $Z^k(M)$, respectivamente $B^k(M)$, os espaços vectoriais das formas diferenciais de grau k fechadas, respectivamente exactas.

Por outras palavras, as formas fechadas formam o núcleo de d , enquanto que as formas exactas formam a imagem de d . Ao par $(\Omega(M), d)$ chamamos o *complexo de de Rham*³, que representamos na forma

$$\dots \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \dots$$

O facto de que $d^2 = 0$ significa que toda a forma exacta é fechada:

$$B^k(M) \subset Z^k(M).$$

Podemos pensar no complexo $(\Omega(M), d)$ como um conjunto de equações diferenciais associadas à variedade M . Encontrar as formas fechadas significa resolver a equação diferencial:

$$d\omega = 0.$$

Por outro lado, as formas exactas podem ser vistas como as soluções triviais desta equação. O espaço das soluções interessantes módulo as soluções triviais é, precisamente, a cohomologia de de Rham:

Definição 16.2. *Chama-se **cohomologia de de Rham de M de ordem k** ao espaço vectorial*

$$H^k(M) \equiv Z^k(M)/B^k(M).$$

Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. O pull-back fornece uma aplicação linear $\Phi^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ que comuta com os diferenciais:

$$\Phi^* d\omega = d(\Phi^*\omega).$$

Segue-se que Φ^* transforma formas fechadas (respectivamente, exactas) em formas fechadas (respectivamente, exactas). Assim, obtemos uma aplicação linear ao nível das respectivas cohomologias:

$$\Phi^* : H^\bullet(N) \rightarrow H^\bullet(M), [\omega] \mapsto [\Phi^*\omega].$$

Observe que se $\Phi : M \rightarrow N$ e $\Psi : N \rightarrow Q$ são aplicações diferenciáveis, então a aplicação $(\Psi \circ \Phi)^* : H^\bullet(Q) \rightarrow H^\bullet(M)$ é dada por

$$(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*.$$

Por outro lado, a identidade $M \rightarrow M$ induz a identidade $H^\bullet(M) \rightarrow H^\bullet(M)$. Em particular, se $\Phi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo então a aplicação induzida $\Phi^* : H^\bullet(N) \rightarrow H^\bullet(M)$ é um isomorfismo. Concluímos que a cohomologia de de Rham é um *invariante* de variedades diferenciáveis.

³Não se trata de nenhum erro tipográfico! Estes complexo tem o nome do matemático Francês George de Rham, daí a repetição da partícula “de”.

Observação 16.3 (*Crash Course* em álgebra homológica-parte I). O complexo de de Rham é um exemplo de um *complexo diferencial*. Em geral, chama-se **complexo diferencial** a um par (C, d) onde:

- (a) C é um espaço vectorial \mathbb{Z} -graduado, i.e., $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C^k$ é a soma directa de espaços vectoriais⁴;
- (b) $D : C \rightarrow C$ é uma transformação linear de grau 1, i.e., $d(C^k) \subset C^{k+1}$, tal que $d^2 = 0$.

Representamos um complexo pelo diagrama:

$$\cdots \longrightarrow C^{k-1} \xrightarrow{d} C^k \xrightarrow{d} C^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

A d chama-se o **diferencial** do complexo. Introduzimos o subespaço dos **cociclos**:

$$Z^k(C) \equiv \{z \in C^k : dz = 0\},$$

e o subespaço dos **cobordos**

$$B^k(C) \equiv \{dz : z \in C^{k-1}\}.$$

Como $d^2 = 0$, é claro que $B^k(C) \subset Z^k(C)$. A **cohomologia** de (C, d) é a soma directa $H(C) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H(C)^k$ dos espaços vectoriais de cohomologia de ordem k definidos por:

$$H^k(C) = \frac{Z^k(C)}{B^k(C)}.$$

Dados dois complexos (A, d_A) e (B, d_B) , um homomorfismo de complexos $f : A \rightarrow B$ é uma aplicação que:

- (a) é linear e preserva a graduação, i.e., $f(A^k) \subset B^k$;
- (b) comuta com os diferenciais, i.e., $f d_A = d_B f$.

Representamos um homomorfismo de complexos pelo diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A^{k-1} & \xrightarrow{d_A} & A^k & \xrightarrow{d_A} & A^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & B^{k-1} & \xrightarrow{d_B} & B^k & \xrightarrow{d_B} & B^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Um homomorfismo de complexos $f : A \rightarrow B$ transforma cociclos em cociclos e cobordos em cobordos. Logo, induz um homomorfismo entre os espaços de cohomologia, que designamos pela mesma letra: $f : H^\bullet(A) \rightarrow H^\bullet(B)$.

Os complexos diferenciais e os homomorfismos de complexos formam um categoria. O estudo destas estruturas algébricas é um dos temas centrais de uma área importante da álgebra conhecida por *álgebra homológica*.

Podemos resumir as observações acima, dizendo que a correspondência que a uma variedade diferenciável M associa o seu complexo de de Rham $\Omega^\bullet(M)$, e a uma aplicação diferenciável $\Phi : M \rightarrow N$ associa o pull-back $\Phi^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$, é um functor *contravariante*, que leva a categoria das variedades diferenciáveis na categoria dos complexos diferenciais.

⁴Mais geralmente, podem-se considerar complexos formados por módulos sobre anéis (por exemplo, grupos abelianos). As considerações que se seguem são ainda válidas para a categoria dos módulos sobre anéis, com as modificações óbvias.

Um outro complexo que podemos associar a uma variedade diferenciável M é o complexo $\Omega_c(M)$ das formas diferenciais com suporte compacto. Assim, temos o subespaço vectorial das formas fechadas com suporte compacto:

$$Z_c^k(M) \equiv \{\omega \in \Omega_c^k(M) : d\omega = 0\},$$

e o subespaço vectorial das formas exactas com suporte compacto:

$$B_c^k(M) \equiv \{d\eta : \eta \in \Omega_c^{k-1}(M)\}.$$

A **cohomologia de de Rham com suporte compacto** de ordem k é o subespaço vectorial

$$H_c^k(M) = Z_c^k(M)/B_c^k(M).$$

É claro que, se M é compacta, então $H_c^\bullet(M) = H^\bullet(M)$.

Note que se $\Phi : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, em geral, o pull-back $\Phi^*\omega$ de uma forma diferencial $\omega \in \Omega_c(N)$ com suporte compacto, é uma forma com suporte *não-compacto*. Por outro lado, se $\Phi : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável e *própria* então o pull-back induz uma aplicação $\Phi^* : \Omega_c^\bullet(N) \rightarrow \Omega_c^\bullet(M)$. Segue-se que a cohomologia de de Rham com suporte compacto também é um invariante de variedades diferenciáveis.

As cohomologias de de Rham de grau 0 têm os seguintes significados:

Teorema 16.4. *Seja M uma variedade diferenciável. Então:*

$$H^0(M) = \mathbb{R}^l,$$

onde l é o número de componentes conexas de M , e

$$H_c^0(M) = \mathbb{R}^{l'},$$

onde l' é o número de componentes conexas compactas de M .

Demonstração. Temos que $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ e se $f \in C^\infty(M)$ satisfaz $df = 0$, então f é localmente constante. Assim, vemos que:

$$Z^0(M) = \mathbb{R}^l,$$

onde l é o número de componentes conexas de M . Como

$$B^0(M) = \{0\},$$

temos, também, $H^0(M) = \mathbb{R}^l$.

Por outro lado, tomando formas com suporte compacto, se $f \in C_c^\infty(M)$ satisfaz $df = 0$, então f é constante nas componentes compactas de M e é zero nas componentes não-compactas. Como, $B_c^0(M) = \{0\}$, concluímos que

$$H_c^0(M) = \mathbb{R}^{l'},$$

onde l' é o número de componentes conexas compactas de M . □

Em geral, o cálculo da cohomologia $H^k(M)$ ou $H_c^k(M)$, para $k \geq 1$, directamente a partir da definição, é muito difícil. Podemos, apenas, dizer que

$$H^k(M) = H_c^k(M) = 0, \text{ se } k > \dim M,$$

pois neste caso $\Omega^k(M) = 0$.

Veremos nas próximas lições algumas técnicas para o cálculo da cohomologia de de Rham. Por agora, limitamo-nos a um exemplo simples onde o cálculo directo é, ainda, possível.

EXEMPLO 16.5.

Seja $M = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Como \mathbb{S}^1 é compacto, temos que $H^\bullet(\mathbb{S}^1) = H_c^\bullet(\mathbb{S}^1)$. Como \mathbb{S}^1 é conexo, temos que:

$$H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}.$$

Para calcular $H^1(\mathbb{S}^1)$, tomemos a 1-forma $-ydx + xdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Esta forma restringe-se a uma 1-forma em \mathbb{S}^1 que designaremos por ω . Como $\dim \mathbb{S}^1 = 1$, ω é fechada. Por outro lado, $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ define uma parametrização de $\sigma :]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$, logo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \omega &= \int_{]0, 2\pi[} \sigma^* \omega \\ &= \int_{]0, 2\pi[} (-\sin t) d \cos t + \cos t d \sin t \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Pelo corolário do Teorema de Stokes, vemos que ω não é exacta, logo representa uma classe de cohomologia $[\omega] \in H^1(\mathbb{S}^1)$ não-trivial.

A forma ω tem um significado geométrico: como $\sigma^* \omega = dt$, temos que $\omega = d\theta$ em $\mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$, onde $\theta : \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ é a coordenada ângulo (o inverso da parametrização σ). Assim, por vezes, designa-se a forma ω por $d\theta$, apesar desta forma não ser exacta.

Vejamos que a classe $[\omega]$ gera $H^1(\mathbb{S}^1)$. Dada uma forma $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ temos $\alpha = f\omega$, para alguma função $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Seja

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta,$$

e defina-se a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$g(\theta) = \int_0^\theta (\alpha - c\omega) = \int_0^\theta (f(\theta) - c) d\theta.$$

Como:

$$\begin{aligned} g(\theta + 2\pi) &= \int_0^{\theta+2\pi} (f(\theta) - c) d\theta \\ &= \int_0^\theta (f(\theta) - c) d\theta + \int_\theta^{\theta+2\pi} (f(\theta) - c) d\theta \\ &= g(\theta) + \int_0^{2\pi} (f(\theta) - c) d\theta = g(\theta), \end{aligned}$$

obtemos uma função $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ . Em $\mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$, temos que

$$dg = f(\theta) d\theta - c d\theta = \alpha - c\omega.$$

Segue-se que $dg = \alpha - c\omega$ em \mathbb{S}^1 e, portanto, $[\alpha] = c[\omega]$. Isto mostra que $[\omega]$ gera $H^1(\mathbb{S}^1)$ e concluímos que:

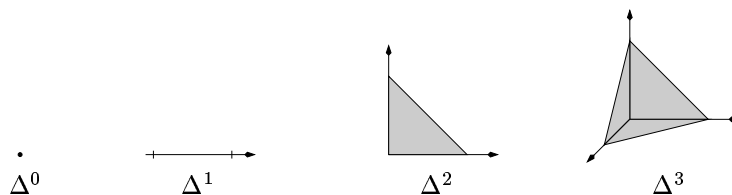
$$H^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}.$$

Vimos acima que a cohomologia de de Rham é um invariante de variedades diferencial. Na realidade, esta cohomologia é um invariante topológico. Isto é uma consequência do famoso Teorema de de Rham, que relaciona a cohomologia singular e a cohomologia de de Rham.

Para definir a cohomologia singular procedemos do seguinte modo. Designamos por $\Delta^k \subset \mathbb{R}^k$ o **k -símplice standard**:

$$\Delta^k = \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k t_i \leq 1, t_i \geq 0\}.$$

Note que, $\Delta^0 = \{0\}$ é um conjunto singular.



Definição 16.6. *Seja M uma variedade. Chama-se k -símplice singular a uma aplicação $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ de classe C^∞ . Chama-se k -cadeia singular a uma combinação linear formal*

$$c = \sum_{i=1}^p a_i \sigma_i,$$

onde os $a_i \in \mathbb{R}$ e os σ_i são k -símplices singulares.

O termo “singular” é justificado pela ausência de qualquer hipótese de regularidade nos diferenciais das aplicações: uma k -cadeia em M , em geral, não parametriza uma subvariedade de M , e a sua imagem pode estar contida numa subvariedade de dimensão menor do que k .

Vamos designar por $S_k(M; \mathbb{R})$ o conjunto das k -cadeias singulares. Este conjunto é um espaço vectorial com as operações óbvias. Mais formalmente, $S_k(M; \mathbb{R})$ é o módulo livre gerado pelo conjunto dos k -símplices singulares.

Note que o k -símplice standard também pode ser visto como o símplice singular id: $\Delta^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Definimos a sua **face i** , onde $0 \leq i \leq k$, como sendo o $(k-1)$ -símplice $k^i : \Delta^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida por:

$$k^i(t_1, \dots, t_{k-1}) = \begin{cases} (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{k-1}), & \text{se } i = 1, \dots, k, \\ (1 - \sum_{j=0}^{k-1} t_j, t_1, \dots, t_{k-1}), & \text{se } i = 0. \end{cases}$$

Mais geralmente, para um símplice $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ definimos a **face i do símplice** como sendo o $(k-1)$ -símplice $\sigma^i : \Delta^{k-1} \rightarrow M$ dado por $\sigma^i = \sigma \circ k^i$.

Definição 16.7. *Seja $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ um k -símplice singular numa variedade M . O **bordo** de σ é a $(k-1)$ -cadeia*

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma^i.$$

Para uma cadeia singular $c = \sum_{j=1}^p a_j \sigma_j$, o seu bordo é a cadeia

$$\partial c = \sum_{j=1}^p a_j \partial\sigma_j = \sum_{j=1}^p a_j \sigma_j^i.$$

O significado geométrico desta definição é o de que consideramos as faces de cada símplice com uma certa escolha de sinais. Ilustramos com o exemplo do símplice standard 2-dimensional.

EXEMPLO 16.8.

O bordo do símplice standard σ id: $\Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a cadeia:

$$\partial\sigma = \sigma^0 - \sigma^1 + \sigma^2,$$

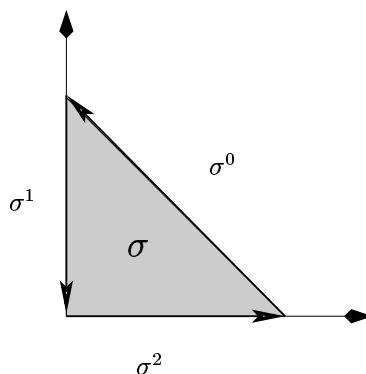
onde σ^0 , σ^1 e σ^2 são os 1-símplices (faces) dados por:

$$\sigma^0(t) = (1-t, t),$$

$$\sigma^1(t) = (0, t),$$

$$\sigma^2(t) = (t, 0).$$

Podemos representar este bordo, esquematicamente, pela figura:



Por sua vez, os símplices σ^0 , σ^1 e σ^2 têm bordos:

$$\partial\sigma^0 = (0, 1) - (1, 0),$$

$$\partial\sigma^1 = (0, 0) - (0, 1),$$

$$\partial\sigma^2 = (1, 0) - (0, 0),$$

(aqui, para um 0-símplice, estamos a confundir a aplicação com a sua imagem).

Note que:

$$\partial(\partial\sigma) = 0.$$

No exemplo, vimos que $\partial^2\sigma = 0$. Isto é um facto perfeitamente geral, que resulta da escolha cuidadosa dos sinais e parametrizações das faces. A sua demonstração é deixada como exercício:

Lema 16.9. Para toda a cadeia singular c :

$$\partial(\partial c) = 0.$$

Desta forma obtemos um complexo $S(M; \mathbb{R}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(M; \mathbb{R})$:

$$\cdots \longleftarrow S_{k-1}(M; \mathbb{R}) \xleftarrow{\partial} S_k(M; \mathbb{R}) \xleftarrow{\partial} S_{k+1}(M; \mathbb{R}) \longleftarrow \cdots$$

a que chamamos **complexo das cadeias singulares** em M .

Observação 16.10 (*Crash Course* em álgebra homológica-parte II). Nos complexos que considerámos a propósito da cohomologia de de Rham, os diferenciais *amentavam* o grau, enquanto que para as cadeias singulares, o diferencial *diminui* o grau.

Para um complexo $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k$ em que o diferencial diminui o grau⁵

$$\cdots \longleftarrow C_{k-1} \xleftarrow{\partial} C_k \xleftarrow{\partial} C_{k+1} \longleftarrow \cdots$$

dizemos que $z \in C_k$ é um **ciclo** se $\partial z = 0$ e dizemos que z é um **bordo** se $z = \partial b$. Neste caso, a **homologia** do complexo C é a soma directa $H(C) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H_k(C)$ dos espaços vectoriais definidos por:

$$H_k(C) = \frac{Z_k(C)}{B_k(C)},$$

onde $Z_k(C)$ é o subespaço dos ciclos e $B_k(C)$ é o subespaço dos bordos. Note, ainda, o posicionamento dos índices.

Assim, temos a homologia associada ao complexo $S(M; \mathbb{R})$:

$$H_k(M; \mathbb{R}) = \frac{Z_k(M; \mathbb{R})}{B_k(M; \mathbb{R})},$$

a que se chama **homologia singular** de M com coeficientes reais.

Se $\Phi : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável entre duas variedades, dado $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$, um símplice singular em M , então $\Phi_*(\sigma) \equiv \Phi \circ \sigma : \Delta^k \rightarrow N$ é um símplice singular em N . Se extendermos esta operação a cadeias $c = \sum_j a_j \sigma_j$ por linearidade:

$$\Phi_*(c) \equiv \sum_j a_j (\sigma_j \circ \Phi),$$

resulta uma aplicação $\Phi_* : S(M; \mathbb{R}) \rightarrow S(N; \mathbb{R})$, que é um homomorfismo de complexos, i.e., Φ_* é uma aplicação linear e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & S_{k-1}(M; \mathbb{R}) & \xleftarrow{\partial} & S_k(M; \mathbb{R}) & \xleftarrow{\partial} & S_{k+1}(M; \mathbb{R}) & \longleftarrow & \cdots \\ & & \Phi_* \downarrow & & \Phi_* \downarrow & & \Phi_* \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & S_{k-1}(N; \mathbb{R}) & \xleftarrow{\partial} & S_k(N; \mathbb{R}) & \xleftarrow{\partial} & S_{k+1}(N; \mathbb{R}) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Segue-se, como habitual, que Φ_* induz uma aplicação em homologia:

$$\Phi_* : H_\bullet(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_\bullet(N; \mathbb{R}),$$

que é uma transformação linear.

Note que se $\Phi : M \rightarrow N$ e $\Psi : N \rightarrow Q$ são aplicações diferenciáveis, então:

$$(\Psi \circ \Phi)_* = \Psi_* \circ \Phi_*,$$

e a aplicação identidade $M \rightarrow M$ induz a aplicação identidade $S_\bullet(M; \mathbb{R}) \rightarrow S_\bullet(M; \mathbb{R})$. Assim, a correspondência que a uma variedade diferenciável M associa o seu complexo singular $S(M; \mathbb{R})$ e a uma aplicação $\Phi : M \rightarrow N$ associa a transformação $\Phi_* : S(M; \mathbb{R}) \rightarrow S(N; \mathbb{R})$, é um functor *covariante*

⁵É claro que, dado um complexo (C, ∂) em que o diferencial diminui o grau, definindo o complexo (\tilde{C}, d) por $\tilde{C}^k \equiv C_{-k}$ e $d = \partial$, obtemos um complexo em que o diferencial aumenta o grau. Estas convenções são, pois, algo arbitrárias.

da categoria das variedades diferenciáveis para a categoria dos complexos diferenciais. Em particular, vemos que a homologia singular é um invariante de variedades diferenciáveis.

Na definição de símplice exigimos que as cadeias fossem diferenciáveis. Assim, é mais correcto chamar a esta homologia a *homologia singular diferenciável*. Observe que as definições acima de símplices, cadeias, e o seus bordos, fazem ainda sentido se exigirmos apenas continuidade. Daqui resulta a verdadeira homologia singular. Para esta, as aplicações contínuas induzem aplicações ao nível da homologia, e vemos que a homologia singular é um invariante topológico. Mostra-se que:

- (i) toda a classe de homologia possui um representante que é um ciclo de classe C^∞ , e
- (ii) se dois ciclos de classe C^∞ diferem de um bordo de classe C^0 então também diferem de um bordo de classe C^∞ .

Segue-se que a homologia singular e a homologia singular diferenciável coincidem, e não precisamos de as distinguir. Em particular, a homologia singular, que introduzimos acima, é um invariante topológico.

A razão para considerarmos homologia singular diferenciável, é que gostaríamos de a relacionar com a cohomologia de de Rham. Para isso, vamos integrar formas diferenciais sobre cadeias, como passamos a explicar. Se $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \in \Omega^k(\mathbb{R}^k)$ é uma k -forma definida numa vizinhança do k -símplice standard, definimos

$$\int_{\Delta^k} \omega \equiv \int_{\Delta^k} f dx^1 \cdots dx^k.$$

Para uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ numa variedade M , definimos o seu integral sobre um símplice $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ como sendo o número real:

$$\int_{\sigma} \omega \equiv \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega.$$

Mais geralmente, se $c = \sum_{j=1}^p a_j \sigma_j$ é uma k -cadeia singular em M , definimos o integral de ω sobre c por:

$$\int_c \omega \equiv \sum_{j=1}^p a_j \int_{\sigma_j} \omega.$$

Deixamos para o exercícios a demonstração da seguinte versão do Teorema de Stokes:

Teorema 16.11 (Stokes II). *Seja M uma variedade diferenciável, $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ uma $(k-1)$ -forma diferencial, e c uma k -cadeia singular em M . Então:*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Vamos definir uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : Z_{dR}^k(M) \times Z_k(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma. Se $c \in Z_k(M; \mathbb{R})$ é um ciclo e $\omega \in \Omega^k(M)$ é uma forma fechada, então:

$$\langle \omega, c \rangle \equiv \int_c \omega.$$

Note que, se $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ e $b \in S_{k+1}(M; \mathbb{R})$, então o Teorema de Stokes fornece:

$$\begin{aligned} \langle \omega + d\eta, c + \partial b \rangle &= \int_{c+\partial b} (\omega + d\eta) \\ &= \int_c \omega + \int_{\partial b} \omega + \int_c d\eta + \int_{\partial b} d\eta \\ &= \int_c \omega + \int_b d\omega + \int_{\partial c} \eta + \int_b d^2\eta = \langle \omega, c \rangle. \end{aligned}$$

Assim, existe uma forma bilinear induzida ao nível de homologia/cohomologia.

Teorema 16.12 (de Rham). *A forma bilinear*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_{dR}^k(M) \times H_k(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega], [c]) \mapsto \int_c \omega,$$

é não degenerada.

A demonstração deste resultado exige um grau de sofisticação que está para além do âmbito deste curso.

Define-se os espaços de **cohomologia singular** com coeficientes reais $H^k(M; \mathbb{R})$ como sendo os duais dos espaço de homologia singular:

$$H^k(M; \mathbb{R}) \equiv H_k(M; \mathbb{R})^*.$$

O Teorema de de Rham afirma que integração fornece um isomorfismo linear:

$$H^k(M; \mathbb{R}) \simeq H_{dR}^k(M).$$

Concluimos que a cohomologia de de Rham é, afinal, um invariante topológico: Duas variedades (difeomorfas ou não) que são homeomorfas, possuem a mesma cohomologia de de Rham!⁶

EXERCÍCIOS.

1. Mostre que o produto exterior $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M)$ induz um produto $\cup : H^k(M) \times H^l(M) \rightarrow H^{k+l}(M)$, que define em $H(M)$ uma estrutura de anel. A este produto chama-se **produto cup**.

2. Considere a variedade $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Mostre que toda a 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)$ fechada é exacta.

(b) Considere a 2-forma em $\mathbb{R}^3 - 0$ dada por

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

Considere a restrição de ω a \mathbb{S}^2 e calcule $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$. Conclua que essa restrição é fechada, mas não é exacta.

3. Recorrendo à cohomologia de de Rham, mostre que \mathbb{T}^2 e \mathbb{S}^2 não são difeomorfas.

4. Seja c uma cadeia singular. Mostre que $\partial(\partial c) = 0$.

⁶O leitor poderá indagar se duas variedades homeomorfas não terão de ser difeomorfas. De facto, isso não é verdade: o primeiro contra-exemplo deve-se a Milnor que mostrou que na esfera de dimensão 7 existem estruturas *exóticas*, i.e., estruturas diferenciáveis não-difeomorfas à estrutura canónica, compatíveis com a topologia usual. Hoje sabe-se que até o espaço euclideano \mathbb{R}^4 possui estruturas exóticas!

5. Demonstre o Teorema de Stokes para cadeias singulares, verificando cada um dos seguintes passos:

- (a) Basta mostrar o teorema para cadeias que consistem num único símplice.
- (b) Basta mostrar o teorema para o k -símplice standard em \mathbb{R}^k .
- (c) Basta mostrar o teorema para as $(k - 1)$ -formas diferenciais em \mathbb{R}^k do tipo:

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k.$$

(d) Mostre que

$$\int_{\Delta^k} d\omega = \int_{\partial\Delta^k} \omega,$$

onde ω   a forma diferencial de (c).

6. No d -toro $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ considere as 1-cadeias $c_1, \dots, c_d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^d$ definidas por:

$$c_j(t) \equiv (1, \dots, e^{2\pi it}, \dots, 1) \quad (j = 1, \dots, d).$$

Mostre que:

- (a) Os c_j 's são ciclos: $\partial c_j = 0$;
- (b) Os c_j 's não são bordos;
- (c) As classes $\{[c_1], \dots, [c_d]\} \subset H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ formam um conjunto linearmente independente.

LI O 17. INVARIÂNCIA POR HOMOTOPIA E SUCESSÃO DE MAYER-VIETORIS

Vamos agora aprender algumas técnicas que facilitam o cálculo da cohomologia de de Rham duma variedade diferenciável.

Comecamos com o exemplo mais simples de uma variedade: $M = \mathbb{R}^d$. Para calcular a sua cohomologia procedemos por induc o na dimensão. Sendo $\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, vamos considerar a projec o $\pi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ e a inclusão $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} & & \\ \uparrow s \quad \downarrow \pi & & \pi(x, t) = x, \\ \mathbb{R}^d & & s(x) = (x, 0). \end{array}$$

Os respectivos pull-backs fornecem aplica es

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) & & \\ s^* \downarrow \quad \uparrow \pi^* & & \\ \Omega^\bullet(\mathbb{R}^d) & & \end{array}$$

e vamos ver que estas induzem isomorfismos dos espaos de cohomologia:

Proposi o 17.1. *Os homomorfismos induzidos $s^* : H^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(\mathbb{R}^d)$ e $\pi^* : H^\bullet(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ são inversos um do outro.*

Observação 17.2 (*Crash Course* em álgebra homológica-parte III). A demonstração desta proposição vai recorrer a uma técnica bem conhecida da álgebra homológica: Dados dois complexos (A, d) e (B, d) e dois homomorfismos de complexos $f, g : A \rightarrow B$, um **operador de homotopia** é uma aplicação linear $h : A \rightarrow B$ de grau -1 , tal que

$$f - g = \pm(dh \pm hd).$$

Dizemos, ainda, que f e g são homotópicos. Descrevemos esta relação pelo diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A^{k-1} & \xrightarrow{d} & A^k & \xrightarrow{d} & A^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ & & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g & & \\ \cdots & \longrightarrow & B^{k-1} & \xrightarrow{d} & B^k & \xrightarrow{d} & B^{k+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Como $\pm(dh \pm hd)$ leva formas fechadas em formas exactas, esta aplicação induz a aplicação nula em cohomologia. Assim, as aplicações induzidas por f e g ao nível de cohomologia $f, g : H^\bullet(A) \rightarrow H^\bullet(B)$ coincidem: $f = g$.

Demonstração da Proposição. Observe que $\pi \circ s = \text{id}$, logo $s^* \circ \pi^* = \text{id}$. Falta, pois, ver que $\pi^* \circ s^* = \text{id}$. Pela observação que acabámos de fazer, basta construir um operador de homotopia $h : \Omega^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{\bullet-1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ tal que:

$$\text{id} - \pi^* \circ s^* = \pm(dh \pm hd).$$

Para construir h , observe que uma forma diferencial em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ é uma combinação linear de formas diferenciais de dois tipos:

$$\begin{aligned} & f(x, t)(\pi^* \omega), \\ & f(x, t)dt \wedge \pi^* \omega, \end{aligned}$$

onde ω é uma forma diferencial em \mathbb{R}^d . Definimos o operador de homotopia nestas formas por:

$$h : \begin{cases} [l]f(x, t)(\pi^* \omega) \mapsto 0, \\ f(x, t)dt \wedge \pi^* \omega \mapsto \int_0^t f(x, s)ds \pi^* \omega, \end{cases}$$

e extendemos por linearidade a todas as formas. Verifiquemos, então, que h é um operador de homotopia.

Seja $\theta = f(x, t)(\pi^* \omega) \in \Omega^k(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ uma forma do primeiro tipo. Então:

$$(\text{id} - \pi^* \circ s^*)\theta = \theta - \pi^*(f(x, 0)\omega) = (f(x, t) - f(x, 0))\pi^* \omega.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (dh + hd)\theta &= hd\theta \\ &= h \left(\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i - \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) \wedge \pi^* \omega - f \pi^* d\omega \right) \\ &= h \left((-1)^k \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge \pi^* \omega \right) \\ &= \pi^* \omega \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ &= (f(x, t) - f(x, 0))\pi^* \omega. \end{aligned}$$

Assim:

$$(\text{id} - \pi^* \circ s^*)\theta = (dh + hd)\theta,$$

para forma diferenciais do primeiro tipo.

Seja agora $\theta = f(x, t)dt \wedge \pi^*\omega$ uma forma diferencial do segundo tipo. Por um lado,

$$(\text{id} - \pi^* \circ s^*)\theta = \theta,$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} (dh + hd)\theta &= d\left(\int_0^t f(x, s)ds \pi^*\omega\right) + h\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \pi^*\omega - f\pi^*d\omega\right) \\ &= f(x, t)dt \wedge \pi^*\omega + \int_0^t f(x, s)ds d\pi^*\omega - h(f\pi^*d\omega) \\ &= f(x, t)dt \wedge \pi^*\omega + \int_0^t f(x, s)ds \pi^*d\omega - \int_0^t f(x, s)ds \pi^*d\omega \\ &= f(x, t)dt \wedge \pi^*\omega = \theta. \end{aligned}$$

Assim, também neste caso:

$$(\text{id} - \pi^* \circ s^*)\theta = (dh + hd)\theta.$$

□

É claro que $H^0(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}$, pois um conjunto singular é conexo. Por outro lado, $H^k(\mathbb{R}^0) = 0$ se $k \neq 0$. Por indução, concluímos que a cohomologia de \mathbb{R}^d é dada por:

Corolário 17.3 (Lema de Poincaré).

$$H^k(\mathbb{R}^d) = H^k(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Assim, o Lema de Poincaré afirma que em \mathbb{R}^d toda a forma fechada é exacta.

O argumento utilizado acima para mostrar que $H^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \simeq H^\bullet(\mathbb{R}^d)$ estende-se facilmente de \mathbb{R}^d a qualquer variedade M :

Proposição 17.4. *Seja M uma variedade diferenciável, e considere as aplicações $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ e $s : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R} & & \\ \uparrow s \quad \downarrow \pi & & \pi(p, t) = p, \\ M & & s(p) = (p, 0). \end{array}$$

Os homomorfismos induzidos $H^\bullet(M \times \mathbb{R}) \xrightleftharpoons[\pi^*]{s^*} H^\bullet(M)$ são isomorfismos.

A demonstração é deixada como exercício. Na realidade, esta proposição é um caso especial de uma situação muito mais geral: se uma variedade pode ser deformada noutra, então as suas cohomologias são isomorfas. A fim de tornar a noção de deformação precisa, introduzimos a seguinte definição.

Definição 17.5. Sejam $\Phi, \Psi : M \rightarrow N$ aplicações diferenciáveis. Uma **homotopia** entre Φ e Ψ é uma aplicação diferenciável $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ tal que:⁷

$$H(p, t) = \begin{cases} \Phi(p) & \text{se } t \leq 0, \\ \Psi(p) & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Temos então:

Teorema 17.6 (Invariância por homotopia). Se $\Phi, \Psi : M \rightarrow N$ são aplicações homotópicas, então $\Phi^* = \Psi^* : H^\bullet(N) \rightarrow H^\bullet(M)$.

Demonstração. Seja $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ uma homotopia entre Φ e Ψ . Se $s_0, s_1 : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ são as secções:

$$s_0(p) = (p, 0) \text{ e } s_1(p) = (p, 1),$$

então $\Phi = H \circ s_0$ e $\Psi = H \circ s_1$. Assim, ao nível de cohomologia, temos que:

$$\Phi^* = (H \circ s_0)^* = s_0^* \circ H^*,$$

$$\Psi^* = (H \circ s_1)^* = s_1^* \circ H^*.$$

Como s_0^* e s_1^* ambas invertem π^* , coincidem. Concluimos que $\Phi^* = \Psi^*$. \square

Dizemos que duas variedades M e N possuem o mesmo **tipo de homotopia** se existem aplicações diferenciáveis $\Phi : M \rightarrow N$ e $\Psi : N \rightarrow M$ tais que $\Psi \circ \Phi$ e $\Psi \circ \Phi$ são homotópicas a id_M e a id_N , respectivamente. Uma variedade diz-se **contráctil** se possui o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Corolário 17.7. Se M e N possuem o mesmo tipo de homotopia então $H^\bullet(M) \simeq H^\bullet(N)$. Em particular, se M é uma variedade contráctil então:

$$H^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

EXEMPLOS 17.8.

1. Um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ diz-se um **conjunto em estrela** se existir $x_0 \in U$ com a propriedade de que, para todo o $x \in \mathbb{R}^d$, o segmento $tx + (1-t)x_0$ pertence a U . Deixamos como exercício verificar que, nesse caso, U é contráctil. Logo, $H^k(U) = 0$ para $k \geq 1$.

2. A variedade $M = \mathbb{R}^d - 0$ tem o mesmo tipo de homotopia que \mathbb{S}^{d-1} : a inclusão $i : \mathbb{S}^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^d - 0$ e a projecção $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, $x \mapsto x/||x||$, são inversas uma da outra, a menos de homotopia. Assim, $H^\bullet(\mathbb{R}^d - 0) \simeq H^\bullet(\mathbb{S}^{d-1})$.

Existe uma outra ferramenta básica, que permite calcular a cohomologia da variedade M a partir da decomposição de M em espaços mais simples (dos quais sabemos calcular a cohomologia):

⁷Na verdade, duas aplicações são C^∞ -homotópicas sse são C^0 -homotópicas: mostra-se que aplicação contínua entre duas variedades é C^0 -homotópica a uma aplicação C^∞ . Por esta razão, muitas vezes definimos a homotopia apenas no intervalo $[0, 1]$.

Teorema 17.9 (Sucessão de Mayer-Vietoris). *Seja M uma variedade diferenciável, U e V abertos de M tais que $M = U \cup V$. Existe uma sucessão exacta longa:*

$$\longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(M) \longrightarrow$$

Observação 17.10 (*Crash Course* em álgebra homológica-parte IV). Uma sucessão de espaços vectoriais e homomorfismos

$$\dots \longrightarrow C^{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} C^k \xrightarrow{f_k} C^{k+1} \longrightarrow \dots$$

diz-se **exacta** se $\text{Im } f_{k-1} = \text{Ker } f_k$. Uma sucessão exacta da forma:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

diz-se uma **sucessão exacta curta**. Isto, significa que:

- (a) f é injectivo,
- (b) $\text{Im } f = \text{Ker } g$, e
- (c) g é sobrejectivo.

Uma propriedade básicas das sucessões exactas é a seguinte: Dada uma sucessão exacta de espaços vectoriais que termina nos espaços vectoriais triviais:

$$0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow C^k \longrightarrow \dots \longrightarrow C^d \longrightarrow 0$$

a soma alternada das dimensões é nula:

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \dim C^i = 0.$$

Deixamos a demonstração (fácil) para os exercícios.

Para o teorema, estamos interessados numa sucessão exacta curta de *complexos*, i.e., numa sucessão de homomorfismos de complexos da forma:

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$$

Esta sucessão pode ser representada por um grande diagrama comutativo em que todas as linhas são exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & A^{k+1} & \xrightarrow{f} & B^{k+1} & \xrightarrow{g} & C^{k+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longrightarrow & A^k & \xrightarrow{f} & B^k & \xrightarrow{g} & C^k \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longrightarrow & A^{k-1} & \xrightarrow{f} & B^{k-1} & \xrightarrow{g} & C^{k-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow
 \end{array}$$

A demonstração do teorema recorre ao seguinte facto básico de álgebra homológica: Dada uma sucessão exacta curta de complexos existe uma *sucessão exacta longa associada* em cohomologia:

$$\cdots \longrightarrow H^k(A) \xrightarrow{f} H^k(B) \xrightarrow{g} H^k(C) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

onde $d^* : H^k(C) \rightarrow H^{k+1}(A)$ é o chamado *homomorfismo de conexão*. O facto de que $\text{Im } f = \text{Ker } g$ decorre, imediatamente, da definição de sucessão exacta curta. Por outro lado, as igualdades $\text{Im } g = \text{Ker } d^*$ e $\text{Im } d^* = \text{Ker } f$ decorrem da construção de d^* , que passamos a descrever.

Para a construção de d^* é bom ter o grande diagrama comutativo acima presente. Seja $c \in C^k$ um cociclo: $dc = 0$. Como as linhas são exactas, existe $b \in C^k$ tal que $g(b) = c$. Como o diagrama comuta, obtemos

$$g(db) = dg(b) = dc = 0.$$

Mais uma vez, sendo as linhas exactas, existe um único $a \in A^{k+1}$ tal que $f(a) = db$. Note que:

$$f(da) = df(a) = d^2b = 0,$$

logo $da = 0$, i.e., a é um cociclo. Desta forma, a um cociclo $c \in C^k$ associamos um cociclo $a \in A^{k+1}$.

Esta associação depende de escolha intermédia de $b \in C^k$. Se escolhermos outro $b' \in C^k$ tal que $g(b') = c$, então obtemos um novo $a' \in A^{k+1}$. No entanto, observe que

$$g(b - b') = g(b') - g(b) = c - c = 0,$$

logo existe $\bar{a} \in A^k$ tal que $f(\bar{a}) = b - b'$. Assim, obtemos

$$f(d\bar{a} - a + a') = df(\bar{a}) - f(a) + f(a') = d(b - b') - db + db' = 0.$$

Como f é injectiva, concluímos que $a - a' = d\bar{a}$. Isto mostra que escolhas diferentes levam a elementos na mesma classe de cohomologia.

Por outro lado, esta associação leva cobordos em cobordos. De facto, se $c \in C^k$ é um cobordo, i.e., $c = dc'$, então existe $b' \in C^{k-1}$ tal que $g(b') = c'$. Temos que

$$g(b - db') = g(b) - dg(b') = c - dc' = 0.$$

Logo, existe $a' \in A^k$ tal que $f(a') = b - db'$, e:

$$f(a - da') = f(a) - df(a') = db - db + d^2b' = 0.$$

Como f é injectiva, temos que $a = da'$ é um cobordo.

Assim, esta associação determina um homomorfismo $d^* : H^k(C) \rightarrow H^{k+1}(A)$ que transforma $[c]$ em $[a]$. Deixamos como exercício verificar que, para esta definição, temos $\text{Im } g = \text{Ker } d^*$ e $\text{Im } d^* = \text{ker } f$.

Demonstração da Teorema. Pela observação, basta ver que temos uma sucessão exacta curta:

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \longrightarrow \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Nesta sucessão, a primeira aplicação é dada por:

$$\omega \mapsto (\omega|_U, \omega|_V),$$

enquanto que a segunda aplicação é dada por:

$$(\theta, \eta) \mapsto \theta|_{U \cap V} - \eta|_{U \cap V}.$$

Como $M = U \cup V$, é claro que a primeira aplicação é injectiva. Por outro lado, se $(\theta, \eta) \in \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V)$ pertence ao núcleo da segunda aplicação, então

$$\theta|_{U \cap V} = \eta|_{U \cap V}.$$

Assim, podemos definir uma forma diferencial em M por:

$$\omega_p = \begin{cases} \theta_p & \text{se } p \in U, \\ \eta_p & \text{se } p \in V. \end{cases}$$

Logo, a imagem da primeira aplicação coincide com o núcleo da segunda aplicação. Finalmente, seja $\xi \in \Omega^\bullet(U \cap V)$. Podemos escolher uma partição da unidade $\{\rho_U, \rho_V\}$ subordinada à cobertura $\{U, V\}$. Então $\rho_V \omega \in \Omega^\bullet(U)$ e $\rho_U \omega \in \Omega^\bullet(V)$ (note a troca de U e V !). Este para de formas é transformado pela segunda aplicação em:

$$(\rho_V \omega, -\rho_U \omega) \mapsto \rho_V \omega + \rho_U \omega = \omega.$$

Logo a segunda aplicação é sobrejectiva, e concluímos que a sucessão curta é exacta. \square

EXEMPLO 17.11.

Como exemplo vamos calcular a cohomologia das esferas \mathbb{S}^d para $d \geq 2$ (no Exemplo 16.5, calculámos $H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ directamente, a partir da definição).

Seja $N \in \mathbb{S}^d$ o pólo norte e consideremos o conjunto aberto $U = \mathbb{S}^d - N$. A projecção estereográfica $\pi_N : U \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ é um difeomorfismo, logo U é contráctil. Da mesma forma, se $S \in \mathbb{S}^d$ é o pólo sul, o conjunto aberto $V = \mathbb{S}^d - S$ é contráctil. Por outro lado, $M = U \cap V$ e a intersecção $U \cap V$ é difeomorfa (por qualquer das projecções estereográficas) a $\mathbb{R}^{d-1} - 0$. Como vimos no Exemplo 17.8.2, $\mathbb{R}^{d-1} - 0$ tem o mesmo tipo de homotopia que \mathbb{S}^{d-1} .

Assim, temos todos os ingredientes para calcular a sucessão de Mayer-Vietoris para o par (U, V) :

- Se $k \geq 1$, esta sucessão fornece:

$$\cdots \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow H^k(\mathbb{S}^{d-1}) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(\mathbb{S}^d) \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow \cdots$$

Assim, $H^{k+1}(\mathbb{S}^d) \simeq H^k(\mathbb{S}^{d-1})$ e, por indução, concluímos que

$$H^k(\mathbb{S}^d) \simeq H^{k-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \simeq \cdots \simeq H^1(\mathbb{S}^{d-k+1}).$$

- Por outro lado, como U , V e $U \cap V$ são conexos, os primeiros termos da sucessão são:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H^1(\mathbb{S}^d) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Daqui vemos que (ver Exercício 5 desta secção) $\dim H^1(\mathbb{S}^d) = 0$.

Assim, concluímos que:

$$H^k(\mathbb{S}^d) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, d, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um gerador de $H^d(\mathbb{S}^d)$ é dado pela restrição a \mathbb{S}^d da forma diferencial $\omega \in \Omega^d(\mathbb{R}^{d+1})$ definida por:

$$\omega = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^i x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{d+1}.$$

De facto, esta forma não é exacta: um cálculo simples mostra que $\int_{\mathbb{S}^d} \omega \neq 0$.

Como vimos na lição anterior, a cohomologia com suporte compacto não é functorial para as aplicações diferenciáveis. No entanto, ela é functorial para as aplicações próprias e para as inclusões. Estes factos fazem com que a cohomologia com suporte compacto satisfaça a propriedades análogas, mas distintas, da cohomologia de de Rham.

Por exemplo, temos agora:

Proposição 17.12. *Seja M uma variedade diferenciável. Então:*

$$H_c^\bullet(M \times \mathbb{R}) \simeq H_c^{\bullet-1}(M).$$

Demonstração. Basta considerar o caso $M = \mathbb{R}^d$. Note que, se $\pi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ é a projecção, então uma forma $\pi^*\omega$ tem suporte não-compacto. Assim, vamos construir antes aplicações de “push-forward”

$$\begin{aligned} \pi_* : \Omega_c^{\bullet+1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) &\rightarrow \Omega_c^\bullet(\mathbb{R}^d), \\ e_* : \Omega_c^\bullet(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \Omega_c^{\bullet+1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

que são homomorfismos de complexos e que são inversas homotópicas.

Para construir π_* , observamos que toda a forma com suporte compacto em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ é uma combinação de formas do tipo

$$\begin{aligned} f(x, t)(\pi^*\omega), \\ f(x, t)dt \wedge \pi^*\omega, \end{aligned}$$

onde ω é uma forma diferencial em \mathbb{R}^d com suporte compacto, e f é uma função com suporte compacto. A aplicação π_* é dada por:

$$\begin{aligned} f(x, t)(\pi^*\omega) &\longmapsto 0, \\ f(x, t)dt \wedge \pi^*\omega &\longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)dt \omega. \end{aligned}$$

Por outro lado, para construir e_* escolhemos uma forma $\theta \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ com $\int_{\mathbb{R}} \theta = 1$ e definimos:

$$e_* : \omega \rightarrow \pi^*\omega \wedge \theta.$$

É imediato, destas definições, que $\pi_* \circ e_* = \text{id}$, $d\pi_* = \pi_* d$ e $e_* d = de_*$. Para completar a demonstração, basta ver que a composição $e_* \circ \pi_*$ é homotópica à aplicação identidade. Deixamos como exercício verificar que a aplicação $h : \Omega_c^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^{\bullet-1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ dada por:

$$\begin{aligned} f(x, t)(\pi^*\omega) &\longmapsto 0, \\ f(x, t)dt \wedge \pi^*\omega &\longmapsto \int_{-\infty}^t f(x, s)ds \pi^*\omega - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)dt \int_{-\infty}^t \theta \right) \pi^*\omega, \end{aligned}$$

é uma homotopia entre $e_* \circ \pi_*$ e a identidade. \square

Assim, a cohomologia com suporte compacto *não* é invariante por homotopia. Por outro lado, o Lema de Poincaré tem de ser modificado da seguinte forma:

Corolário 17.13 (Lema de Poincaré para suporte compacto).

$$H_c^k(\mathbb{R}^d) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = d, \\ 0 & \text{se } k \neq d. \end{cases}$$

Para construir a sucessão de Mayer-Vietoris para suporte compacto, observamos que, se $U, V \subset M$ são abertos com $U \cup V = M$, as inclusões $U, V \hookrightarrow M$, $U \cap V \hookrightarrow U$ e $U \cap V \hookrightarrow V$ fornecem uma sucessão exacta curta

$$0 \longleftarrow \Omega_c^\bullet(M) \longleftarrow \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) \longleftarrow \Omega^\bullet(U \cap V) \longleftarrow 0$$

onde a primeira aplicação é:

$$(\theta, \eta) \mapsto \theta + \eta,$$

enquanto que a segunda aplicação é dada por:

$$\omega \mapsto (-\omega, \omega).$$

Obtemos, então:

Teorema 17.14 (Sucessão de Mayer-Vietoris para suporte compacto). *Seja M uma variedade diferenciável, U e V abertos de M tais que $M = U \cup V$. Existe uma sucessão exacta longa:*

$$\longleftarrow H_c^k(M) \longleftarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \longleftarrow H_c^k(U \cap V) \xleftarrow{d^*} H_c^{k-1}(M) \longleftarrow$$

Os detalhes da demonstração são deixados como exercício.

EXERCÍCIOS.

1. Demonstre a Proposição 17.4.
2. Mostre que um conjunto em estrela é contráctil.
3. Seja $i : N \hookrightarrow M$ uma subvariedade. Dizemos que $r : M \rightarrow N$ é uma **retracção** se $r \circ i = \text{id}_N$. Dizemos que N é uma **deformação por retracção** de M se existe um retracção $r : M \rightarrow N$ tal que $i \circ r$ é homotópica a id_M . Mostre que:
 - (a) Se N é uma deformação por retracção de M , então $H^\bullet(N) \simeq H^\bullet(M)$.
 - (b) Mostre que \mathbb{S}^2 é um deformação por retracção de $\mathbb{R}^3 - 0$.
 - (c) Mostre que \mathbb{T}^2 é uma deformação por retracção de $\mathbb{R}^3 - \mathbb{S}^1$.
4. Mostre que o homomorfismo de conexão da sucessão exacta longa satisfaz $\text{Im } g = \text{Ker } d^*$ e $\text{Im } d^* = \text{ker } f$.

5. Dada uma sucessão exacta de espaços vectoriais

$$0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow \dots \longrightarrow C^k \longrightarrow \dots \longrightarrow C^d \longrightarrow 0$$

mostre que

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \dim C^i = 0.$$

6. Calcule a cohomologia de \mathbb{T}^2 e de \mathbb{P}^2 .
7. Complete a construção da sucessão de Mayer-Vietoris para cohomologia com suporte compacto, mostrando que:

$$0 \longleftarrow \Omega_c^\bullet(M) \longleftarrow \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) \longleftarrow \Omega^\bullet(U \cap V) \longleftarrow 0$$

é um sequência exacta curta de complexos.

8. Calcule a cohomologia com suporte compacto de $\mathbb{R}^d - 0$.

LIÇÃO 18. CÁLCULOS EM COHOMOLOGIA

Vimos na lição precedente que a sucessão de Mayer-Vietoris relaciona a cohomologia da união com a cohomologia dos factores. Esta sucessão, fornece uma técnica de cálculo de cohomologia por indução, que é extremamente versátil. Para aplicar esta técnica, necessitamos de cobrir M por abertos cujas intersecções sejam triviais em cohomologia.

Definição 18.1. Dizemos que uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de uma variedade diferenciável M é uma **boa cobertura** se todas as intersecções finitas $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ são difeomorfas a \mathbb{R}^d . Uma **variedade de tipo finito** é uma variedade diferenciável que possui uma boa cobertura finita.

Proposição 18.2. Toda a variedade diferenciável M possui uma boa cobertura. Se M é compacta então possui uma boa cobertura finita.

Demonstração. Seja g uma métrica Riemanniana para M . Por um resultado bem conhecido de geometria Riemanniana, para cada ponto $p \in M$, podemos escolher uma vizinhança U_p convexa (i.e., para quaisquer $q, q' \in U_p$ existe uma única geodésica em U_p que une q a q'), tais que:

- (i) cada U_p é difeomorfa a \mathbb{R}^d , e
- (ii) a intersecção de duas vizinhanças convexas é convexa.

Segue-se que $\{U_p\}_{p \in M}$ é uma boa cobertura de M . Por outro lado, se M é compacta, então um número finito de vizinhanças convexas cobre M . \square

Estamos, então, em condições de aplicar a nossa técnica. Começamos por mostrar que a cohomologia não é muito grande.

Teorema 18.3. Seja M uma variedade de tipo finito. Os espaços de cohomologia $H^k(M)$ e $H_c^k(M)$ têm dimensão finita.

Para a demonstração, precisamos do seguinte resultado de álgebra homológica:

Lema 18.4 (Lema dos Cinco). Considere um diagrama comutativo de homomorfismos de espaços vectoriais:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{f'_2} & C' & \xrightarrow{f'_3} & D' & \xrightarrow{f'_4} & E' \end{array}$$

onde as linhas são exactas. Se α, β, δ e ε são isomorfismos, então γ também é um isomorfismo.

A demonstração (elementar) consiste em passear pelo diagrama e é deixada como exercício.

Demonstração. Para quaisquer dois abertos U e V , a sucessão de Mayer-Vietoris:

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^k(U \cup V) \xrightarrow{r} H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow \cdots$$

mostra que:

$$H^k(U \cup V) \simeq \text{Ker } r \oplus \text{Im } r \simeq \text{Im } d^* \oplus \text{Im } r.$$

Assim, se as cohomologias de U , V , e $U \cap V$ têm dimensão finita, então a cohomologia de $U \cup V$ também tem dimensão finita.

Mostremos, por indução no cardinal da cobertura, que as variedades com uma boa cobertura finita, tem cohomologia de dimensão finita:

- Se M é difeomorfa a \mathbb{R}^d o Lema de Poincaré mostra que M tem cohomologia de dimensão finita.
- Suponhamos que todas as variedades com uma boa cobertura com no máximo p abertos, têm cohomologia de dimensão finita. Seja M uma variedade que admite uma boa cobertura $\{U_1, \dots, U_{p+1}\}$ com $p+1$ elementos. Observe que os abertos:

$$\begin{aligned} &U_{p+1}, \\ &U_1 \cup \cdots \cup U_p, \text{ e} \\ &(U_1 \cup \cdots \cup U_p) \cap U_{p+1} = (U_1 \cap U_{p+1}) \cup \cdots \cup (U_p \cap U_{p+1}), \end{aligned}$$

têm todos cohomologia de dimensão finita, pois todos possuem uma boa cobertura com no máximo p abertos. Assim, a cohomologia de $M = U_1 \cup \cdots \cup U_{p+1}$ também tem dimensão finita.

A demonstração para a cohomologia com suporte compacto é análoga. \square

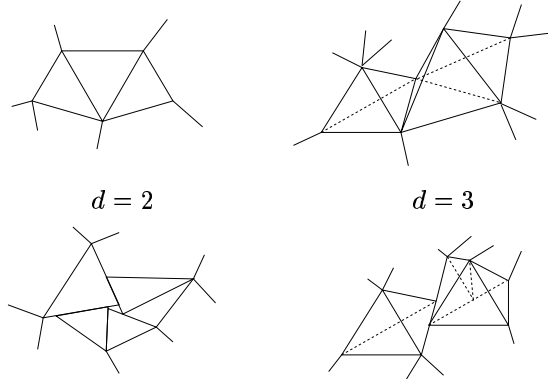
O leitor deverá estar familiarizado com a fórmula de Euler para polígonos regulares. Como uma aplicação simples deste resultado vamos generalizar esta fórmula a variedades compactas que admitem uma triangulação⁸. A noção de *triangulação* de uma variedade M , corresponde uma boa decomposição de M em simplices regulares, como passamos a explicar.

Um simplexe $\sigma : \Delta^d \rightarrow M$ diz-se *regular* se possui uma extensão a um difeomorfismo $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \tilde{\sigma}(U) \subset M$, onde U é uma vizinhança de Δ^d . Para um simplexe $\sigma : \Delta^d \rightarrow M$ definimos anteriormente as suas faces de dimensão $d-1$, que são simplices $\sigma^i : \Delta^{d-1} \rightarrow M$. Iterando esta construção, obtemos a **faces de dimensão** $d-k$, que são $(d-k)$ -simplices $\sigma : \Delta^{d-k} \rightarrow M$. Observe que as faces de um simplexe regular, são simplices regulares.

Definição 18.5. *Uma **triangulação** de uma variedade compacta M de dimensão d , é uma coleção finita $\{\sigma_i\}$ de d -simplices regulares, que cobrem M , e satisfazem a seguinte propriedade: se para dois simplices $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$, então a intersecção $\sigma_i \cap \sigma_j$ é uma face de ambos os simplices σ_i e σ_j .*

⁸Na realidade, toda a variedade compacta admite uma triangulação, mas este é um resultado difícil que está para além do âmbito destas lições.

A figura seguinte ilustra a condição de triangulação em dimensão 2 e 3: Enquanto que nas duas figuras de cima a condição verifica-se, nas figuras de



baixo ela não se verifica.

Como vimos acima, uma variedade compacta M tem cohomologia finita. Para uma variedade M com cohomologia finita, chama-se **característica de Euler** ao inteiro $\chi(M)$ definido por:

$$\chi(M) = \dim H^0(M) - \dim H^1(M) + \cdots + (-1)^d \dim H^d(M).$$

Temos então:

Teorema 18.6 (Fórmula de Euler). *Seja M uma variedade compacta de dimensão d . Para toda a triangulação de M :*

$$(-1)^d \chi(M) = r_0 - r_1 + \cdots + (-1)^d r_d,$$

onde r_i designa o número de faces de dimensão i na triangulação.

Demonstração. Fixemos uma triangulação $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{r_d}\}$ de M . Para cada $k = 0, 1, 2, \dots, d-1$, defina-se os conjuntos abertos:

$$V_k = M - \{\text{faces da triangulação de dimensão } k\}.$$

Vamos mostrar que, para $0 \leq k \leq d-1$, temos:

$$(18.1) \quad \chi(M) = \chi(V_k) + (-1)^d (r_0 - r_1 + \cdots + (-1)^k r_k).$$

Como

$$V_{d-1} = \bigcup_{j=1}^{r_d} \text{int}(\sigma_j),$$

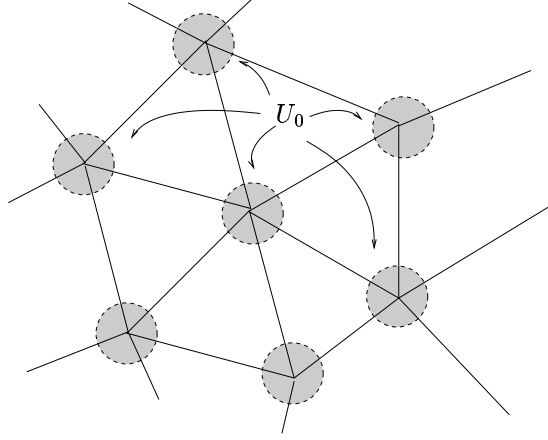
e cada aberto $\text{int}(\sigma_j)$ é contráctil, vemos que $H^k(V_{d-1}) = 0$, se $k > 0$. Assim:

$$\chi(V_{d-1}) = \dim H^0(V_{d-1}) = r_d.$$

A relação (18.1) (com $k = d-1$) e este resultado, demonstram a fórmula de Euler.

Vamos começar por verificar (18.1) para $k = 0$. Para cada face de dimensão 0 escolhamos vizinhanças abertas $U_{0,1}, \dots, U_{0,r_0}$, disjuntas e difeomorfas à bola $B_1^d = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$, e definimos o aberto:

$$U_0 = \bigcup_{i=0}^{r_0} U_{0,i}.$$



Note que $V_0 \cup U_0 = M$. Como cada $U_{0,i}$ é contráctil, temos que

$$\dim H^k(U_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Por outro lado, cada intersecção $V_0 \cap U_{0,i}$ possui uma deformação por retracção em \mathbb{S}^{d-1} , logo

$$\dim H^k(V_0 \cap U_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, d - 1, \\ 0, & \text{se } k \neq 0, d - 1. \end{cases}$$

Estamos em condições de aplicar a sucessão de Mayer-Vietoris ao par (U_0, V_0) . Se $d > 2$, esta sucessão fornece a seguinte informação:

(i) Os termos de mais baixo grau são:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow H^0(U_0) \oplus H^0(V_0) \longrightarrow H^0(U_0 \cap V_0) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0 \oplus H^1(V_0) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Daqui resulta que:

$$\begin{aligned} \dim H^0(M) - \dim H^0(U_0) - \dim H^0(V_0) + \\ + \dim H^0(U_0 \cap V_0) - \dim H^1(M) + \dim H^1(V_0) = 0. \end{aligned}$$

Como o número de componentes conexas de M e V_0 são iguais, temos que

$$\dim H^0(M) = \dim H^0(V_0).$$

Por outro lado, o número de componentes conexas de U_0 e $V_0 \cap U_0$ também são iguais, logo concluímos da relação acima que:

$$\dim H^1(M) = \dim H^1(V_0).$$

(ii) Para $1 < k < d - 1$, obtemos:

$$0 \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow 0 \oplus H^k(V_0) \longrightarrow 0$$

Logo:

$$\dim H^k(M) = \dim H^k(V_0).$$

(iii) Os últimos termos não-nulos da sucessão são:

$$0 \longrightarrow H^{d-1}(M) \longrightarrow 0 \oplus H^{d-1}(V_0) \longrightarrow H^{d-1}(U_0 \cap V_0) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^d(M) \longrightarrow 0 \oplus H^d(V_0) \longrightarrow 0$$

Como $\dim H^{d-1}(U_0 \cap V_0) = r_d$, esta sucessão fornece:

$$\dim H^{d-1}(M) - \dim H^{d-1}(V_0) + \dim H^{d-1}(V_0) - \dim H^d(M) = -r_d.$$

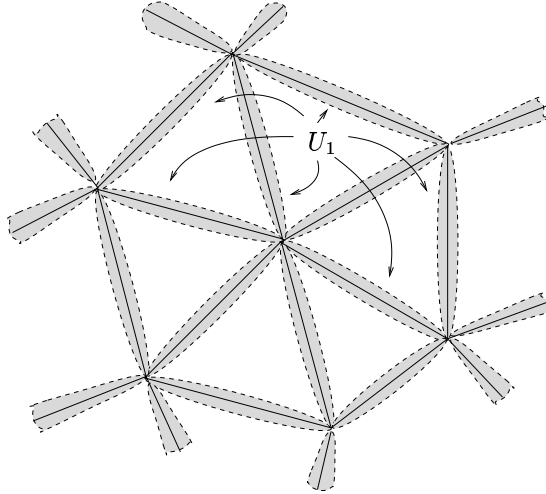
Se $d = 2$, obtemos os mesmos resultados sem necessidade de dividir a sucessão por troços. Assim, concluímos que:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \dim H^i(M) \\ = \sum_{i=0}^d (-1)^i \dim H^i(V_0) + (-1)^d r_d = \chi(V_0) + (-1)^d r_d.$$

O que demonstra (18.1) se $k = 0$.

Para demonstrar (18.1) no caso $k = 1$, procedemos da seguinte forma: para cada face de dimensão 1, escolhemos vizinhanças abertas $U_{1,1}, \dots, U_{1,r_1}$ das (1-faces)-(0-faces), que são disjuntas e difeomorfas a $(\text{int } \Delta^1) \times B_1^{d-1}$, e definimos o aberto:

$$U_1 = \bigcup_{i=0}^{r_1} U_{1,i}.$$



Temos que $V_0 = U_1 \cup V_1$. Vemos, agora, que U_1 é a união de r_1 abertos contracteis, enquanto que $U_1 \cap V_1$ possui o mesmo tipo de homotopia que a união disjunta de $(d - 2)$ -esferas. De forma inteiramente análoga ao caso $k = 0$, utilizando a sucessão de Mayer-Vietor, mostra-se que

$$\chi(V_0) = \chi(V_1) + (-1)^{d-1} r_1.$$

Em geral, para cada k , escolhemos vizinhanças abertas $U_{k,1}, \dots, U_{k,r_k}$ das $\{k\text{-faces}\} - \{(k-1)\text{-faces}\}$, que são disjuntas e difeomorfas a $(\text{int } \Delta^k) \times B_1^{d-k}$, e definimos o aberto:

$$U_k = \bigcup_{i=0}^{r_k} U_{k,i}.$$

Temos que $V_k = U_k \cup V_k$, com U_k a união de r_k abertos contracteis, enquanto que $U_k \cap V_k$ possui o mesmo tipo de homotopia que a união disjunta de $(d-k-1)$ -esferas. Utilizando a sucessão de Mayer-Vietor, verifica-se que

$$\chi(V_{k-1}) = \chi(V_k) + (-1)^{d-k} r_k.$$

Isto mostra que (18.1) é válida. \square

Como vimos num exercício da Lição 16, o produto exterior induz um produto ao nível de cohomologia:

$$\cup : H^k(M) \times H^l(M) \rightarrow H^{k+l}(M), [\omega] \cup [\eta] \equiv [\omega \wedge \eta].$$

Se η tem suporte compacto, então $\omega \wedge \eta$ também tem suporte compacto. Logo, temos igualmente um produto:

$$\cup : H^k(M) \times H_c^l(M) \rightarrow H_c^{k+l}(M).$$

Pelo Teorema de Stokes, a integração de formas diferenciais desce ao nível da cohomologia (tal como no caso do Teorema de de Rham). Assim, se M é uma variedade orientada de dimensão d , temos uma forma bilinear

$$(18.2) \quad H^k(M) \times H_c^{d-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}, ([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta.$$

Teorema 18.7 (Dualidade de Poincaré). *Seja M uma variedade orientada de tipo finito. A forma bilinear (18.2) é não degenerada. Em particular:*

$$H^k(M) \simeq H_c^{d-k}(M)^*.$$

Demonstração. Observe que a forma bilinear induz sempre um homomorfismo $H^k(M) \rightarrow H_c^{d-k}(M)^*$. Se U e V são abertos, deixamos como exercício mostrar que as sucessões de Mayer-Vietoris para Ω^\bullet e para Ω_c^\bullet , determinam um diagrama de sucessões exactas longas:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^k(U \cup V) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U \cap V) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_c^{d-k}(U \cup V)^* & \longrightarrow & H_c^{d-k}(U)^* \oplus H_c^{d-k}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{d-k}(U \cap V)^* & \longrightarrow \end{array}$$

que é comutativo a menos de sinais. Isto significa, por exemplo, que

$$\int_{U \cap V} \omega \wedge d^* \theta = \pm \int_{U \cup V} d^* \omega \wedge \tau.$$

Aplicando o Lema dos Cinco a este diagrama, vemos que, se a dualidade de Poincaré se verifica para U , V e $U \cap V$, então também se verifica para $U \cup V$.

Seja então M uma variedade com uma boa cobertura finita. Mostramos a dualidade de Poincaré por indução na cardinalidade da cobertura:

- Se $M \simeq \mathbb{R}^d$, pelos Lemas de Poincaré, temos:

$$H^k(\mathbb{R}^d) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases} \quad H_c^k(\mathbb{R}^d) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = d, \\ 0 & \text{se } k \neq d. \end{cases}$$

Daqui, segue-se que a forma bilinear é não-degenerada.

- Suponha-se que a dualidade de Poincaré se verifica para coberturas de cardinalidade menor ou igual a p . Seja M uma variedade que admite uma boa cobertura $\{U_1, \dots, U_{p+1}\}$ com $p+1$ elementos. Observe que os abertos:

$$\begin{aligned} &U_{p+1}, \\ &U_1 \cup \dots \cup U_p, \text{ e} \\ &(U_1 \cup \dots \cup U_p) \cap U_{p+1} = (U_1 \cap U_{p+1}) \cup \dots \cup (U_p \cap U_{p+1}), \end{aligned}$$

satisfazem a dualidade de Poincaré, pois todos possuem uma boa cobertura com, no máximo, p abertos. Assim, a dualidade de Poincaré verifica-se para $M = U_1 \cup \dots \cup U_{p+1}$.

□

Para uma variedade compacta, temos que $H_c(M) = H(M)$. Logo, se M é compacta e orientada, a dualidade de Poincaré afirma que:

$$H^k(M) \simeq H^{d-k}(M).$$

Um corolário imediato é:

Corolário 18.8. *Se M é uma variedade compacta orientada, de dimensão ímpar então:*

$$\chi(M) = 0.$$

Observação 18.9. A dualidade de Poincaré ainda é válida para variedades sem boas coberturas finitas. No entanto, se a cohomologia não tem dimensão finita, é preciso ter um pouco de cuidado com a forma como se enuncia: o que se mostra é que, para qualquer variedade orientada M , é válido o isomorfismo

$$H^k(M) \simeq (H_c^{d-k}(M))^*.$$

A equivalência dual $H_c^{d-k}(M) \simeq H^k(M)^*$, em geral, *não é* válida. Isto deve-se a que o dual de um produto directo é uma soma directa, mas o dual de uma soma directa não é um produto directo. Um exemplo é dado nos exercícios desta lição.

Por causa desta observação, no corolário seguinte omitimos a hipótese de existência de uma boa cobertura finita.

Corolário 18.10. *Seja M uma variedade conexa, orientável, de dimensão d . Então*

$$H_c^d(M) \simeq \mathbb{R}.$$

Em particular, se M é compacta, conexa e orientável, então $H^d(M) \simeq \mathbb{R}$.

Deixamos como exercício verificar que, se M é uma variedade conexa, de dimensão d , não orientável, então $H_c^d(M) = 0$.

Vemos, pois, que uma variedade conexa é orientável sse $H_c^d(M) = \mathbb{R}$. Note-se, ainda, que uma escolha de uma orientação μ determina um gerador de $H_c^d(M)$. De facto, nesse caso, integração fornece uma escolha canónica para o isomorfismo $H_c^d(M) \simeq \mathbb{R}$:

$$H_c^d(M) \rightarrow \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_M \omega.$$

Na realidade, este isomorfismo não é mais do que dualidade de Poincaré, pois sendo M conexa, $H^0(M)$ é o espaço das funções constantes em M . Frequentemente, utilizamos a mesma letra μ para representar a orientação e a classe $\mu \in H_c^d(M)$ que corresponde à função constante 1.

Assim, seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades compactas, conexas, orientadas, com $\dim M = \dim N = d$. Os isomorfismos canónicos $H_c^d(M) \simeq \mathbb{R}$ e $H_c^d(N) \simeq \mathbb{R}$ permitem representar a aplicação induzida

$$\Phi^* : H_c^d(N) \rightarrow H_c^d(M)$$

por um número real a que se chama o *grau da aplicação*. Por outras palavras:

Definição 18.11. *Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação própria entre duas variedades conexas, orientadas, com $\dim M = \dim N = d$. O grau de Φ é o único número real $\deg \Phi$ que satisfaz:*

$$\int_M \Phi^* \omega = \deg \Phi \int_N \omega,$$

para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega_c^d(N)$.

Se μ_M e μ_N são as orientações de M e N , então o grau da aplicação é dado por:

$$\Phi^* \mu_N = (\deg \Phi) \mu_M,$$

onde, seguindo a convenção acima, μ_M e μ_N também representam os geradores de $H_c^d(M)$ e $H_c^d(N)$ determinados pelas orientações.

No que se segue, por uma questão de simplicidade, vamos considerar apenas variedades compactas. A generalização destes resultados ao caso não compacto é deixada ao cuidado do leitor. O nosso principal objectivo é dar uma caracterização geométrica do grau de uma aplicação.

Começamos com a seguinte proposição:

Proposição 18.12. *Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades compactas, conexas, orientadas, com $\dim M = \dim N = d$. Se Φ não é sobrejectiva então $\deg \Phi = 0$.*

Demonstração. Seja $q_0 \in N - \Phi(M)$. Como $\Phi(M)$ é fechado, q_0 possui uma vizinhança aberta $U \subset N - \Phi(M)$. Seja $\omega \in \Omega_c^d(N)$ uma forma com suporte em U e tal que $\int_N \omega \neq 0$. Então:

$$0 = \int_M \Phi^* \omega = \deg \Phi \int_N \omega,$$

logo $\deg \Phi = 0$. □

A interpretação geométrica para o grau de uma aplicação, a que aludimos acima, é dada pelo resultado seguinte. Ela mostra, por exemplo, que o grau de uma aplicação é sempre um número inteiro, um facto que não é nada óbvio da definição de grau.

Teorema 18.13. *Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação entre variedades compactas, conexas, orientadas, de dimensão d . Seja $q \in N$ um valor regular de Φ , e para cada $p \in \Phi^{-1}(q)$ defina*

$$\operatorname{sgn}_p \Phi \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } d_p \Phi : T_p M \rightarrow T_q N \text{ preserva orientações,} \\ -1 & \text{se } d_p \Phi : T_p M \rightarrow T_q N \text{ troca orientações.} \end{cases}$$

Então⁹:

$$\operatorname{deg} \Phi = \sum_{p \in \Phi^{-1}(q)} \operatorname{sgn}_p \Phi.$$

Em particular, o grau é sempre um número inteiro.

Demonstração. Seja q um valor regular de Φ . O conjunto $\Phi^{-1}(q)$ é discreto, e como M é compacto, tem de ser finito: $\Phi^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_N\}$. Precisamos do seguinte lema:

Lema 18.14. *Existe uma vizinhança V de q e vizinhanças disjuntas U_1, \dots, U_N de p_1, \dots, p_N tais que*

$$\Phi^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_N.$$

Sejam O_1, \dots, O_N vizinhanças disjuntas de p_1, \dots, p_N , e W uma vizinhança compacta de q . O conjunto $W' \subset M$ definido por:

$$W' = \Phi^{-1}(W) - (O_1 \cup \dots \cup O_N),$$

é um conjunto compacto. Assim, $\Phi(W')$ é um conjunto fechado que não contém q . Existe, pois, um aberto $V \subset W - \Phi(W')$ contendo q e temos que $\Phi^{-1}(V) \subset O_1 \cup \dots \cup O_N$. Se tomarmos $U_i = O_i \cap \Phi^{-1}(V)$, vemos que o lema é satisfeito.

Fixemos V e U_1, \dots, U_N , como no lema. Como cada p_i é regular, podemos, ainda, assumir que V é um domínio de coordenadas (y^1, \dots, y^d) em N e que os U_i 's são domínios de coordenadas em M , tais que $\Phi|_{U_i}$ é um difeomorfismo.

Escolha-se $\omega \in \Omega^d(N)$ da forma:

$$\omega = f dy^1 \wedge \dots \wedge dy^d,$$

onde $f \geq 0$ é uma função com $\operatorname{supp} f \subset V$. É claro que

$$\operatorname{supp} \Phi^* \omega \subset U_1 \cup \dots \cup U_N,$$

de forma que:

$$\int_M \Phi^* \omega = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \Phi^* \omega.$$

Como $\Phi|_{U_i}$ é um difeomorfismo, a fórmula de mudança de variável fornece:

$$\int_{U_i} \Phi^* \omega = \pm \int_V \omega = \pm \int_N \omega,$$

⁹Se $\Phi^{-1}(q)$ é vazio então, por definição, a soma vale zero.

onde o sinal é positivo se $\Phi|_{U_i}$ preserva as orientações e é negativo caso contrário. Como $\Phi|_{U_i}$ preserva orientações se $\text{sgn}_{p_i} \Phi > 0$ e troca orientações se $\text{sgn}_{p_i} \Phi < 0$, concluímos que

$$\int_M \Phi^* \omega = \sum_{i=1}^N \text{sgn}_{p_i} \Phi \int_N \omega,$$

o que demonstra o resultado. \square

Note que os graus de aplicações homotópicas coincidem. Este facto pode ser utilizado com grande eficácia, como ilustramos através de um exemplo.

EXEMPLO 18.15.

Consideremos a aplicação antipodal $\Phi : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ dada por $\Phi(p) = -p$. Para a orientação canónica de \mathbb{S}^d definida pela forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^i x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{d+1}.$$

temos que Φ preserva ou troca orientações dependendo se n é ímpar ou é par. Como $\Phi^{-1}(q)$ contém apenas um ponto, concluímos que

$$\deg \Phi = (-1)^{d-1}.$$

Isto também se segue directamente a partir da definição, pois $\int_{\mathbb{S}^d} \omega \neq 0$, e

$$\int_{\mathbb{S}^d} \Phi^* \omega = (-1)^{d-1} \int_{\mathbb{S}^d} \omega.$$

Vejamus que isto implica que numa esfera de dimensão par todo o campo vectorial se anula nalgum ponto. De facto, se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2d})$ é um campo vectorial que não se anula, então, para cada $p \in \mathbb{S}^{2d}$, existe uma única semi-circunferência γ_p que une p a $-p$ e que tem vector tangente $X(p)$. Assim, a aplicação $H : \mathbb{S}^{2d} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^{2d}$ dada por

$$H(p, t) = \gamma_p(t),$$

é uma homotopia entre Φ e a aplicação identidade. Concluímos que:

$$-1 = \deg \Phi = \deg \text{id} = 1,$$

uma contradição.

Por outro lado, para a esfera $\mathbb{S}^{2d-1} \subset \mathbb{R}^{2d}$, o campo vectorial X definido por:

$$X(x_1, \dots, x_{2d}) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2d}, -x_{2d-1}),$$

é um campo vectorial que não se anula.

Como aplicação destes resultados, vamos estudar o índice de um zero de um campo vectorial X numa variedade M . Começamos com o caso de um campo vectorial num aberto $U \subset \mathbb{R}^d$, i.e., uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^d$, e suponhamos que $x_0 \in U$ é um zero isolado de X . Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset U$ (a bola fechada de raio ε centrada em x_0) não contém outro zero de X . Tomando $\mathbb{S}_\varepsilon^{d-1}$, a esfera de raio ε centrada em x_0 , temos a aplicação de Gauss $G : \mathbb{S}_\varepsilon^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$, que é definida por:

$$G(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Definimos o **índice** de X em x_0 com sendo o grau da aplicação de Gauss:

$$\text{ind}_{x_0} X \equiv \text{deg } G,$$

onde em cada esfera tomamos a orientação canónica. O leitor deverá verificar que esta definição é independente de ε .

O índice é invariante por difeomorfismos:

Lema 18.16. *Se X e X' são campos vectoriais em $U, U' \subset \mathbb{R}^d$ e $\Phi : U \rightarrow U'$ é um difeomorfismo, tal que X é Φ -relacionado com X' . Se x_0 é um zero isolado de X , então*

$$\text{ind}_{x_0} X = \text{ind}_{\Phi(x_0)} X'.$$

Demonstração. Podemos assumir que $\Phi(x_0) = x_0 = 0$ e que U é convexo.

Suponhamos, primeiro, que Φ preserva orientações. Então, a aplicação

$$H(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{t}\Phi(tx), & \text{se } t > 0, \\ \Phi'(x), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

é uma homotopia entre Φ' e Φ , por difeomorfismos que fixam a origem. Como Φ' é homotópica à identidade, por difeomorfismos que fixam a origem, vemos que existe uma homotopia, por difeomorfismos que fixam a origem, entre Φ e identidade. Assim, concluímos que as aplicações de Gauss de X e de X' são homotópicas. Logo, estas aplicações possuem o mesmo grau.

Para o caso não-orientável, basta agora considerar o caso em que Φ é uma reflexão. Neste caso, os campos X e X' estão relacionados por:

$$X' = \Phi \circ X \circ \Phi^{-1}.$$

As funções de Gauss de X e X' satisfazem a mesma relação:

$$G' = \Phi \circ G \circ \Phi^{-1},$$

e, portanto, os seus graus coincidem. □

Assim, se M é uma variedade e $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial, definimos o **índice de X** num zero isolado $p_0 \in M$, por:

$$\text{ind}_{p_0} X \equiv \text{ind}_0 \phi_* X|_U,$$

onde (U, ϕ) é um sistema de coordenadas centrado em p_0 . Pelo lema, esta definição é independente do sistema de coordenadas utilizado. Veremos na próxima série de lições o *Teorema de Poincaré-Hopf* que afirma que se X é um campo vectorial numa variedade compacta M , com um número finito de zeros $\{p_1, \dots, p_N\}$. Então:

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^N \text{ind}_{p_i} X.$$

Por enquanto, limitamo-nos ao problema de calcular o índice de um campo vectorial.

Para isso, seja X um campo vectorial numa variedade M e $p_0 \in M$ um zero de X . A secção zero $Z \subset TM$ e a fibra $T_{p_0}M \subset TM$ intersectam-se transversalmente em $0 \in T_{p_0}M$:

$$T_0(TM) = T_{p_0}Z \oplus T_{p_0}(T_{p_0}M) \simeq T_{p_0}M \oplus T_{p_0}M.$$

Para esta decomposição, o diferencial $d_{p_0}X : T_{p_0}M \rightarrow T_0(TM)$ tem primeira componente a identidade, pois X é uma secção. A segunda componente determina uma aplicação $T_{p_0}M \rightarrow T_{p_0}M$ que vamos, também, designar por $d_{p_0}X$. Um zero p_0 de um campo vectorial X diz-se **não-degenerado** se a aplicação $d_{p_0}X : T_{p_0}M \rightarrow T_{p_0}M$ é não-degenerada.

Proposição 18.17. *Seja $p_0 \in M$ um zero não-degenerado de um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então p_0 é um zero isolado e*

$$\text{ind}_{p_0} X = \begin{cases} +1, & \text{se } \det d_{p_0}X > 0, \\ -1, & \text{se } \det d_{p_0}X < 0. \end{cases}$$

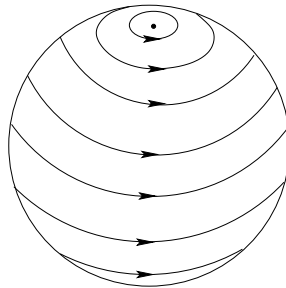
Demonstração. Nas condições da proposição, se escolhermos coordenadas locais (U, ϕ) centradas em p_0 , o campo vectorial $(\phi)_*X|_U$ tem como aplicação de Gauss $G : \mathbb{S}_\varepsilon^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ um difeomorfismo. Este difeomorfismo preserva (troca) orientações sse $\det d_{p_0}X > 0$ (respectivamente, < 0), logo o resultado segue-se do Teorema 18.13. \square

EXEMPLO 18.18.

Em \mathbb{R}^3 , com coordenadas (x, y, z) , temos o campo vectorial

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Este campo vectorial é tangente à esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e por isso define um campo vectorial em $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$, que possui dois zeros: o pólo norte p_N e o pólo sul p_S .



A aplicação $\phi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ é um sistema de coordenadas locais para \mathbb{S}^2 na vizinhança de p_N (e também de p_S), e temos que:

$$\phi_*X = v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v}.$$

onde (u, v) são as coordenadas em \mathbb{R}^2 . Como a aplicação $(u, v) \mapsto (v, -u)$ tem diferencial

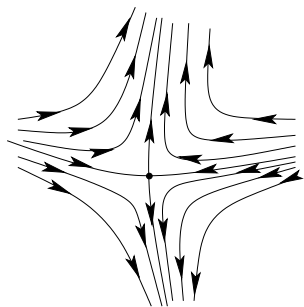
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

concluimos que p_N e p_S são zeros não-degenerados e que:

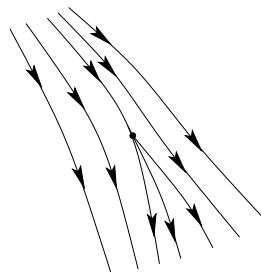
$$\text{ind}_{p_N} X = \text{ind}_{p_S} X = 1.$$

Em casos simples, é fácil determinar o índice de um campo vectorial a partir do seu retrato de fases, mesmo se os zeros são degenerados. A figura

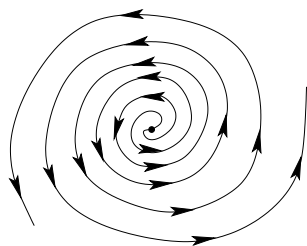
seguinte ilustra alguns exemplos de campos vectoriais planares, com um zero e os respectivos índices. O leitor deverá verificar que os graus das aplicações de Gauss são, de facto, os inteiros que constam na figuram.



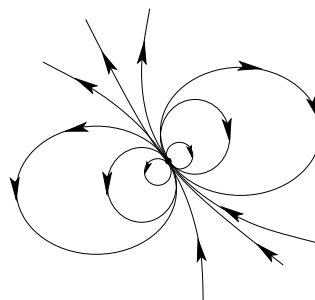
$$\text{ind}_{p_0} X = -1$$



$$\text{ind}_{p_0} X = 0$$



$$\text{ind}_{p_0} X = 1$$



$$\text{ind}_{p_0} X = 2$$

EXERCÍCIOS.

1. Demonstre o Lema dos Cinco.
 2. Calcule $H^k(M)$ e $H_c^k(M)$ para as seguintes variedades:
 - (a) Banda de Möbius;
 - (b) Garrafa de Klein;
 - (c) $M = \mathbb{T}^d$;
(RESPOSTA: $\dim H^k(\mathbb{T}^d) = \binom{d}{k}$.)
 - (d) $M = \mathbb{P}^d(\mathbb{C})$;
(RESPOSTA: $\dim H^{2k}(\mathbb{P}^d(\mathbb{C})) = 1$ se $2k \leq n$, e 0 caso contrário.)
 3. Seja M uma variedade conexa, de dimensão d , não orientável. Mostre que $H_c^d(M) = 0$, da seguinte forma:
 - (a) Mostre que basta ver que são exactas as formas $\omega \in \Omega_c^d(M)$ com $\text{supp } \omega \subset U$, onde U é um aberto difeomorfo a \mathbb{R}^d .
 - (b) Se ω é como em (a), e $\int_U \omega = 0$, então ω é exacta.
 - (c) Se ω é como em (a), mas $\int_U \omega > 0$, então ω também é exacta.
- SUGESTÃO: Construa uma cadeia de abertos U_1, \dots, U_k , com $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ e $U_1 = U_k = U$, que são domínios de coordenadas $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d$, com $\phi_i \circ \phi_{i+1}^{-1}$, para $i = 1, \dots, k-1$, positivos e $\phi_{k-1} \circ \phi_k^{-1}$ negativo. Construa, também,

formas diferenciais $\omega_1 = \omega, \omega_2, \dots, \omega_k = -\omega$ de grau d com suporte $\text{sup } \omega_i \subset U_i$ compacto, e que satisfazem

$$c_i = \frac{\int_{U_i} \omega_i}{\int_{U_i} \omega_{i-1}} > 0.$$

Finalmente, mostre que existem formas de suporte compacto η_i tais que:

$$\omega_i = c_i \omega_{i-1} + d\eta_i,$$

e conclua que ω é exacta.

4. Sejam M_1, M_2, \dots , variedades de tipo finito de dimensão d , e considere a união disjunta dos M_i :

$$M = \bigcup_{i=1}^{+\infty} M_i.$$

Mostre que:

(a) A cohomologia de M é o produto directo:

$$H^k(M) = \prod_{i=1}^{+\infty} H^k(M_i);$$

(b) A cohomologia de M com suporte compacto é a soma directa:

$$H_c^k(M) = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} H_c^k(M_i);$$

Conclua que existe um isomorfismo:

$$H^k(M) \simeq (H_c^{d-k}(M))^*,$$

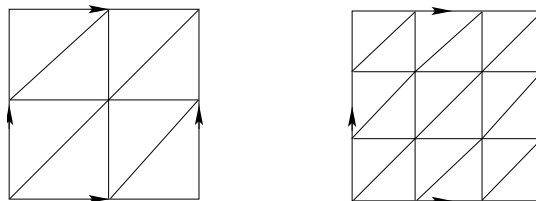
mas que $H_c^{d-k}(M)$ não é isomorfa $H^k(M)^*$.

5. Mostre que, na demonstração da dualidade de Poincaré, o diagrama de sucessões exactas longas:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^k(U \cup V) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U \cap V) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_c^{d-k}(U \cup V)^* & \longrightarrow & H_c^{d-k}(U)^* \oplus H_c^{d-k}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{d-k}(U \cap V)^* & \longrightarrow \end{array}$$

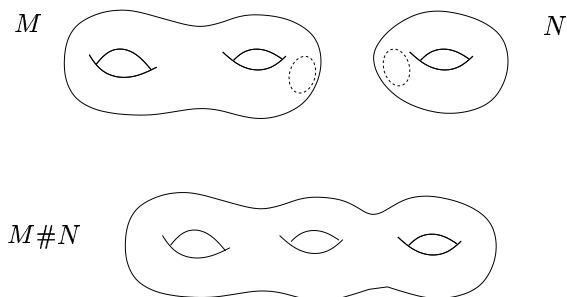
é comutativo a menos de sinais.

6. Considere as seguintes subdivisões do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$:



- (a) Verifique que apenas uma destas subdivisões induz uma triangulação do toro \mathbb{T}^2 ;
 (b) Calcule r_0 , r_1 e r_2 para essa triangulação.

7. Sejam M e N variedades conexas de dimensão d . Seja $M\#N$ a soma conexa de M e N , i.e., a variedade obtida por colagem de M com N ao longo do bordo de abertos difeomorfos à bola $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$:



Calcule a característica de Euler de $M\#N$ em termos das características de Euler de M e de N .

8. Seja $\Phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades compactas, conexas, orientáveis, com $\dim M = \dim N = d$. Mostre que $\deg \Phi = 0$, se Φ não é sobrejectiva.

9. Identifique o plano $M = \mathbb{R}^2$ com o corpo dos complexos \mathbb{C} . Mostre que a função polinomial $z \mapsto z^k$ define em \mathbb{R}^2 um campo vectorial com um zero na origem de índice k .