Geometria Diferencial – Outono de 2003

Ficha 7

Entregar até ao dia do Exame (23 de Janeiro de 2004)

1. Considere uma sucessão exacta curta de fibrados vectoriais

$$0 \longrightarrow \xi \longrightarrow \eta \xrightarrow{\Psi} \theta \longrightarrow 0$$

   Mostre que esta sucessão exacta curta *cinde-se*, i.e., existe um monomorfismo de fibrados vectoriais $\Phi : \theta \to \eta$ tal que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_\theta$.

2. Se $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial orientável e M é uma variedade orientável, mostre que E é uma variedade orientável.

3. Seja ξ um fibrado vectorial e $\{g_{\alpha\beta}\}$ um cociclo definido por uma trivialização $\{\phi_\alpha\}$ de ξ. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) ξ é orientável;

   (b) Existe um cociclo equivalente a $\{g_{\alpha\beta}\}$ em que as funções de transição tomam valores em $GL^+(r)$;

   (c) Existe um cociclo equivalente a $\{g_{\alpha\beta}\}$ em que as funções de transição tomam valores em $SO(r)$.

4. Sejam $E_1 \to M$ e $E_2 \to M$ fibrados vectoriais orientados sobre uma variedade M compacta, orientada e conexa. Considere a soma de Whitney deste fibrados vectoriais e as projecções:

$$\begin{tikzcd} & E_1 \oplus E_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ E_1 & & E_2 \end{tikzcd}$$

   Nesta soma considere as somas das orientações. Mostre que:

   (a) As classes de Thom de E_1, E_2 e $E_1 \oplus E_2$ estão relacionadas por:

$$U_{E_1 \oplus E_2} = \pi_1^* U_{E_1} \wedge \pi_2^* U_{E_2}.$$

   (b) As classes de Euler de E_1, E_2 e $E_1 \oplus E_2$ estão relacionadas por:

$$\chi(E_1 \oplus E_2) = \chi(E_1) \cup \chi(E_2).$$

(VSFF)

5. Seja M uma variedade que admite uma boa cobertura com k abertos, e ξ um fibrado vectorial de rank r sobre M. Mostre que ξ admite $n = rk$ secções globais $s_1, \ldots, s_n$, que geram E_p, para todo o $p \in M$.

6. Seja M uma variedade compacta de dimensão d. Pode-se mostrar que:

   (a) Se $p_1, \ldots, p_N \in M$ então existe um aberto $U \subset M$, difeomorfo à bola $\{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}$, tal que $p_1, \ldots, p_n \in U$.

   (b) Se $\psi : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$ possui grau zero, então é homotópica à aplicação constante.

   Utilize estes factos para demonstrar que, se $\chi(M) = 0$, então existe um campo vectorial em M que não se anula.

7. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que existe uma única conexão ∇ em TG, que é invariante por translações à esquerda e à direita, e pela inversão $g \mapsto g^{-1}$. Mostre, ainda, que ∇ satisfaz as seguintes propriedades:

   (a) Para todos os campos invariantes à esquerda $X, Y \in \mathfrak{g}$:
   $$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

   (b) A torção de ∇ é nula e a sua curvatura é dada por:
   $$R(X, Y) \cdot Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G).$$

   (c) A exponencial de ∇ na identidade $\exp_e$ coincide com a exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

   (d) O transporte paralelo ao longo da curva $c(t) = \exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$, é dado por:
   $$\tau_t(\mathbf{v}) = \mathrm{d}L_{\exp(\frac{t}{2}X)} \cdot \mathrm{d}R_{\exp(\frac{t}{2}X)} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in T_eG.$$

   (e) As geodésicas são as translações dos subgrupos a 1 parâmetro.

!!! BOM NATAL !!!