Geometria Diferencial – Outono de 2003

Ficha 6

Entregar na Aula de 9 de Dezembro de 2003

1. Calcule $H^k(M)$ e $H^k_c(M)$ para as seguintes variedades:

   (a) Banda de Möbius;

   (b) Garrafa de Klein;

   (c) $M = \mathbb{T}^d$;
   (Resposta: $\dim H^k(\mathbb{T}^d) = \binom{d}{k}$.)

   (d) $M = \mathbb{P}^d$;
   (Resposta: $\dim H^{2k}(\mathbb{T}^d) = 1$ se $2k \leq n$, e 0 caso contrário.)

2. Seja M uma variedade conexa, de dimensão d, não orientável. Mostre que $H^d_c(M) = 0$.

3. Sejam $M_1, M_2, \ldots,$ variedades de tipo finito de dimensão d, e considere a união disjunta dos M_i:

$$M = \bigcup_{i=1}^{+\infty} M_i.$$

   Mostre que:

   (a) A cohomologia de M é o produto directo:

$$H^k(M) = \prod_{i=1}^{+\infty} H^k(M_i);$$

   (b) A cohomologia de M com suporte compacto é a soma directa:

$$H^k_c(M) = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} H^k_c(M_i);$$

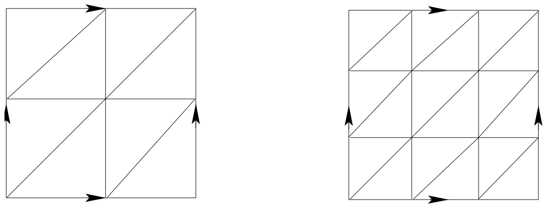
   Conclua que existe um isomorfismo:

$$H^k(M) \simeq (H^{d-k}_c(M))^*,$$

   mas que $H^{d-k}_c(M)$ não é isomorfa $H^k(M)^*$.

(VSFF)

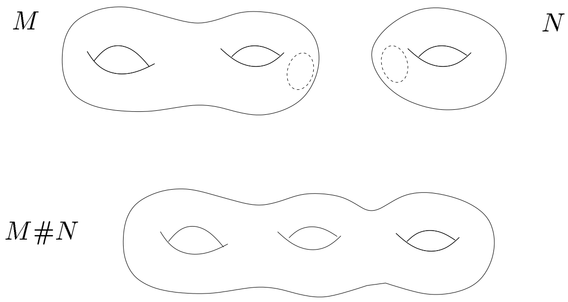
4. Considere as seguintes subdivisões do quadrado $[0,1] \times [0,1]$:



(a) Verifique que apenas uma destas subdivisões induz uma triangulação do toro $\mathbb{T}^2$;

(b) Calcule r_0, r_1 e r_2 para essa triangulação.

5. Sejam M e N variedades conexas de dimensão d. Seja $M\#N$ a soma conexa de M e N, i.e., a variedade obtida por colagem de M com N ao longo de abertos difeomorfos à bola $\{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}$:



Calcule a característica de Euler de $M\#N$ em termos das características de Euler de M e de N.

6. Seja $\Phi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{T}^d$ uma aplicação diferenciável. Mostre que $\deg \Phi = 0$.