Geometria Diferencial – Outono de 2003

Ficha 5

Entregar na Aula de 25 de Novembro de 2003

1. Mostre que o espaço projectivo $\mathbb{P}^d$ é orientável sse d é ímpar.

2. Seja M uma variedade Riemanniana orientada de dimensão d. Mostre que existe uma única operação $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{d-k}(M)$ que pode ser caracterizada da seguinte forma: para todo o co-referencial local $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ ortonormado e positivo (i.e., $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d$ é positiva) são satisfeitas as seguintes propriedades:

   (a) $*$ é linear;

   (b) $*1 = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d$ e $*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d) = 1$;

   (c) $*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = \alpha_{k+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_d$.

   A $*$ chama-se **operador estrela de Hodge**. Mostre, ainda, que:
   $$* * \omega = (-1)^{k(d-k)}\omega, \text{ onde } k = \deg \omega.$$

3. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$. Mostre a seguinte relação entre as derivadas de Lie:
   $$\mathcal{L}_X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) = \mathcal{L}_X\omega(X_1, \ldots, X_k) + \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \ldots, \mathcal{L}_X X_i, \ldots, X_k).$$

4. Seja G um grupo de Lie de dimensão d, e fixe uma forma volume $\omega \in \Omega^d(M)$ invariante à esquerda. Defina o integral de uma função $f : G \to \mathbb{R}$ por:
   $$\int_G f \equiv \int_G f\omega.$$

   (a) Mostre que o integral é invariante por translações à esquerda, i.e., para todo o $g \in G$, é válida a identidade
   $$\int_G f \circ L_g = \int_G f.$$

   (b) Dê um exemplo de um grupo de Lie em que o integral não é invariante à direita.

(VSFF)

Para cada $g \in G$, a forma diferencial $R_g^*\omega$ é invariante à esquerda. Assim, define-se a **função modular** $\lambda : G \to \mathbb{R}$ por

$$R_g^*\omega = \lambda(g)\omega.$$

(c) Mostre que o integral é invariante à direita sse G é **unimodular**, i.e., $\lambda \equiv 1$.

(d) Mostre que um grupo de Lie compacto é unimodular.

5. Seja G um grupo de Lie compacto e $\Phi : G \to GL(V)$ um representação de G. Mostre que existe um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ em V em relação ao qual esta representação é por transformações ortogonais:

$$\langle \Phi(g) \cdot \mathbf{v}, \Phi(g) \cdot \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall g \in G.$$

(Sugestão: Utilize o facto de que um grupo de Lie compacto é unimodular.)

6. Seja G um grupo de Lie compacto. Mostre que G possui uma estrutura Riemanniana bi-invariante, i.e., invariante por translações à esquerda e à direita.
(Sugestão: Uma estrutura Riemanniana em G invariante à esquerda é invariante à direita sse o produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ induzido em $\mathfrak{g} \simeq T_eG$ satisfaz:

$$\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Utilize o facto de que o grupo de Lie é compacto, para encontrar um produto interno em $\mathfrak{g}$ que satisfaz esta propriedade.)