Geometria Diferencial – Outono de 2003

Ficha 4

Entregar na Aula de 11 de Novembro de 2003

1. $SL(2,\mathbb{C})$ designa o grupo das matrizes 2×2 complexas de determinante 1. Mostre que:

   (a) $SL(2,\mathbb{C})$ é 1-conexo.
   (Sugestão: Recorrendo à decomposição polar, mostre que $SL(2,\mathbb{C})$ se retrai em $SU(2)=\mathbb{S}^3$.)

   (b) Todo o homomorfismo de álgebras de Lie $\phi:\mathfrak{sl}(2)\to\mathfrak{gl}(n)$ integra-se num único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi: SL(2)\to GL(n)$.
   (Sugestão: Considere a complexificação $\phi^c:\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\to\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ de ϕ e utilize o exercício anterior.)

2. Seja G um grupo de Lie compacto. Mostre que $\exp:\mathfrak{g}\to G$ é sobrejectiva.

3. Seja $\Phi: G\to H$ um homomorfismo de grupos de Lie, com G conexo. Mostre que se o núcleo de Φ é discreto então está contido no centro de G. Conclua que o grupo fundamental de um grupo de Lie é um grupo abeliano.

4. Seja G um grupo de Lie compacto. Mostre que $\exp:\mathfrak{g}\to G$ é sobrejectiva.

5. Seja V um espaço vectorial de dimensão d. Designe por $S_k(V)$ o conjunto dos k-referenciais de V:

   $$S_k(V)=\{(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k):\text{ os }\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k\text{ são independentes}\}.$$

   Mostre que $S_k(V)$ possui uma estrutura de variedade diferenciável homogénea de dimensão dk. A $S_k(V)$ chama-se **variedade de Stiefel** dos k-referenciais de V.

6. Seja $\Psi: G\times M\to M$ uma acção diferenciável, e $\psi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ a acção infinitesimal associada. Se G_p é o subgrupo de isotropia de p, mostre que a sua álgebra de Lie é a *subálgebra de isotropia*:

   $$\mathfrak{g}_p=\{X\in\mathfrak{g}:\psi(X)_p=0\}.$$