Geometria Diferencial – Outono de 2003

Ficha 3

Entregar na Aula de 28 de Outubro de 2003

1. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial.

   (a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, qual é a relação entre as curvas integrais de X e de λX?

   (b) Se $\Phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ é Φ-relacionado com X, qual é a relação entre as curvas integrais de X e de Y?

2. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial que não se anula. Mostre que as curvas integrais de X formam uma folheação $\mathcal{F}$ de M, de dimensão 1. Reciprocamente, mostre que, localmente, as folheações de dimensão 1 são todas desta forma. Dê um exemplo de uma folheação que não é (globalmente) definida por um campo vectorial.

3. Verifique que a distribuição 2-dimensional em $\mathbb{R}^3$ definida pelos campos vectoriais
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = e^{-x}\frac{\partial}{\partial y} + e^{-x}\frac{\partial}{\partial z},$$
não possui qualquer variedade integral.

4. Considere a distribuição D em $\mathbb{R}^3$ gerada pelos campos vectoriais:
$$\frac{\partial}{\partial x} + \cos x \cos y \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} - \sin x \sin y \frac{\partial}{\partial z}.$$
Verifique que D é involutiva e determine a folheação $\mathcal{F}$ que a integra.

(VSFF)

5. Sejam $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais numa variedade M, tais que:

   (a) $\{X_1|_p, \ldots, X_k|_p\}$ são linearmente independentes, para todo o $p \in M$;

   (b) $[X_i, X_j] = 0$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots, k$.

   Mostre que existe uma única folheação k-dimensional $\mathcal{F}$ de M tal que, para todo o $p \in M$, se tem

   $$T_pL = \langle \left. X_1 \right|_p, \ldots, \left. X_1 \right|_p \rangle,$$

   onde $L \in \mathcal{F}$ é a folha que contém p.

6. Mostre que o fibrado tangente TG de um grupo de Lie G é trivial, i.e., existem campos vectoriais $X_1, \ldots, X_d \in \mathfrak{X}(G)$ que em cada $g \in G$ formam uma base de T_gG. Conclua que uma esfera de dimensão par $\mathbb{S}^{2n}$ não admite uma estrutura de grupo de Lie.

7. Considere $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ como o conjunto dos quaterniões unitários. Verifique que $\mathbb{S}^3$, com o produto de quaterniões, é um grupo de Lie e determine a sua álgebra de Lie. Mostre, ainda, que $\mathbb{S}^3$ e $SU(2)$ são grupos de Lie isomorfos.