**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**

# Geometria Diferencial – Outono de 2003

## Exame Final

(Entregar até às 16h00 do dia 2 de Fevereiro de 2003)

- Justifique as suas respostas de forma completa mas **sucinta**. Para cada problema proposto, mesmo que não consiga obter uma resposta completa, exponha a **solução parcial** que obteve.
- Cada exame deve ser feito **individualmente**, recorrendo apenas a consultas a livros ou apontamentos.
- Resolva **três** dos quatro problemas de desenvolvimento propostos nas páginas seguintes.
- Resolva **dois** dos quatro problemas breves propostos na última página.

1. Teorema da vizinhança tubular

Seja $M$ uma variedade diferenciável de dimensão $d$ e $N \subset M$ uma subvariedade. Designe por $\nu(N) = T_N M/TN$ o fibrado normal a $N$. Vamos identificar $N$ com a secção zero em $\nu(N)$. Um vizinhança $U_0$ de $N$ em $\nu(N)$ diz-se *convexa* se, para qualquer $v \in U_0$, temos $tv \in U_0$, para todo o $t \in [0,1]$.

Uma **vizinhança tubular** de $N$ em $M$ é um mergulho $\Phi : U_0 \to M$ de uma vizinhança convexa $U_0 \subset \nu(N)$ de $N$, tal que $\Phi|_N =$id. Por vezes, também se chama à imagem $U \equiv \phi(U_0)$ uma vizinhança tubular de $N$ em $M$.

O objectivo deste problema é mostrar que qualquer subvariedade mergulhada $N \subset M$ possui uma vizinhança tubular.

- **Caso $M = \mathbb{R}^d$ e $N$ compacto:**

(a) Para $\varepsilon > 0$ defina:

$$U^\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^d : ||x - y|| < \varepsilon, \text{ para algum } x \in N\}.$$

Mostre que existe $\varepsilon$ tal que, para todo $y \in U^\varepsilon$, existe um único ponto $x \in M$ mais perto de $y$.

(b) Definindo $\pi : U^\varepsilon \to N$ por $\pi(y) = x$, onde $x$ é o ponto mais perto de $y$, mostre que $\pi$ é uma submersão e que $ty + (1-t)x \in U^\varepsilon$.

(c) Construa uma vizinhança tubular para este caso.

- **Caso $M$ qualquer e $N$ compacto:**

(d) Considere uma métrica Riemanniana em $M$. Defina o análogo da $\varepsilon$-vizinhança $U^\varepsilon$ de $N$ em $M$, e demonstre o análogo de (b) e (c).

(e) Construa uma vizinhança tubular para este caso.

- **Caso geral:**

(g) Mostre que existe uma função $\varepsilon : M \to \mathbb{R}^+$ de classe $C^\infty$ e própria.

(f) Quando $N$ não é compacta, adapte o argumento anterior, substituindo $\varepsilon$ por uma função $\varepsilon : M \to \mathbb{R}^+$ própria.

2. Cohomologia de Álgebras de Lie

Neste problema $G$ designa um grupo de Lie, conexo, de dimensão $d$, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Vamos, também, designar por $C^k(\mathfrak{g})$ o espaço vectorial das aplicações $k$-multilineares alternadas:

$$\omega : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que existe um isomorfismo natural entre o espaço vectorial $\Omega^k_L(G)$ das formas diferenciais invariantes à esquerda e o espaço vectorial $C^k(\mathfrak{g})$.

(b) Para este isomorfismo, verifique que o diferencial $d : \Omega^k_L(G) \to \Omega^{k+1}_L(G)$ corresponde ao diferencial $d : C^k(\mathfrak{g}) \to C^{k+1}(\mathfrak{g})$ dado por:

$$d\omega(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_k).$$

(c) A cohomologia do complexo $(C^\bullet(\mathfrak{g}), d)$ designa-se por $H^\bullet(\mathfrak{g})$ e chama-se *cohomologia da álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$. Calcule $H^\bullet(\mathfrak{su}(2))$.

Assuma, agora, que $G$ é compacto. Neste caso, sabemos que existe uma forma diferencial não-nula $\mu \in \Omega^d(G)$, que é invariante por translações à esquerda e à direita. Se $f : G \to V$ é uma função de classe $C^\infty(G)$ com valores num espaço vectorial de dimensão finita $V$, defina o integral de $f$ sobre $G$ como sendo o vector:

$$\int_G f\, dg \equiv \sum_{i=1}^{N} \left( \int_G f_i \mu \right) \mathbf{v}_i,$$

onde $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ é uma base de $V$ e $f(g) = \sum_i f_i(g)\mathbf{v}_i$ (esta definição é independente da escolha de base).
Definimos a aplicação $I : \Omega^k(G) \to \Omega^k_L(G)$ por:

$$(I\omega)_h = \int_G (L_g^*\omega)_h \, dg.$$

(d) Mostre que $I$ está bem definida, $I^2 = I$ e $dI = Id$.

(e) Verifique que $H^k_{dR}(G) \simeq H^k(\mathfrak{g})$.

(f) Se $G$ não é compacto será que $H^k_{dR}(G)$ e $H^k(\mathfrak{g})$ ainda são isomorfos?

3. Classes características

Seja $\Sigma$ uma 2-variedade orientada e fechada (i.e., compacta e sem bordo). Verifique que existe um aplicação que a cada fibrado linha complexo $L \to \Sigma$ associa um *número inteiro* $c_1(L) \in \mathbb{Z}$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Para quaisquer fibrados linha complexos $L_1 \to \Sigma$ e $L_2 \to \Sigma$:

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) \oplus c_1(L_2).$$

(b) Se $\Sigma'$ é outra 2-variedade orientada e fechada, e $\psi : \Sigma' \to \Sigma$ é uma aplicação diferenciável, então:

$$c_1(\psi^* L) = \deg(\psi) c_1(L).$$

(c) Dois fibrados linhas $L \to \Sigma$ e $L' \to \Sigma$ são isomorfos sse $c_1(L) = c_1(L')$;

(d) Um fibrado linha $L \to \Sigma$ é trivial sse $c_1(L) = 0$.

A $c_1(L)$ chama-se o *primeiro número de Chern*. Mostre, ainda, que:

(e) O fibrado tangente $T\Sigma \to \Sigma$ possui uma estrutura natural de fibrado linha complexo.

(f) Se $g = g(\Sigma)$ designa o género de $\Sigma$, então:

$$c_1(T\Sigma) = 2 - 2g.$$

## 4. Conexões

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vectorial com fibra $F$. Uma *conexão generalizada* em $E$ é uma distribuição $\mathcal{D}$ no espaço total $E$ tal que

$$d_u\pi|_{\mathcal{D}_u} : \mathcal{D}_u \to T_{\pi(u)}M,$$

é um isomorfismo para todo o $u \in E$. A conexão generalizada diz-se *plana* se a distribuição $\mathcal{D}$ for integrável.

(a) Mostre que uma conexão $\nabla$ determina uma conexão generalizada $\mathcal{D}$;

(b) Mostre que uma conexão generalizada determina um levantamento horizontal de caminhos: para todo o caminho $\gamma : [0,1] \to M$ e todo o $u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ existe um único caminho $\tilde{\gamma} : [0, \varepsilon) \to E$ tal que:

  (i) $\tilde{\gamma}(0) = u$,

  (ii) $\pi(\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$,

  (iii) $d\tilde{\gamma}(t)/dt \in \mathcal{D}_{\tilde{\gamma}(t)}$, para todo o $t \in [0, \varepsilon)$.

Daqui em diante, assuma que o levantantento horizontal de um caminho está definido para todo o $t \in [0, 1]$. Tal como no caso de conexões em fibrados vectoriais, definimos *transporte paralelo* ao longo do caminho $\gamma$ como sendo a aplicação

$$\tau_t : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(t)},$$

que a $u \in E_{\gamma(0)}$ associa $\tilde{\gamma}(t) \in E_{\gamma(t)}$.

Fixe um ponto $x_0 \in M$ e considere o espaço dos caminhos fechados baseados em $x_0$:

$$\Omega(M, x_0) = \{\gamma : [0, 1] \to M|\ \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

(c) Mostre que o transporte paralelo define uma aplicação

$$H : \Omega(M, x_0) \to \mathrm{Diff}(F)$$

que satisfaz $H(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = H(\gamma_1) \circ H(\gamma_2)$;

(d) Mostre que se a conexão é plana e $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(M, x_0)$ são caminhos homótopicos então $H(\gamma_1) = H(\gamma_2)$.

(e) Assim, para um conexão plana, obtemos um homomorfismo de grupos $h : \pi_1(M, x_0) \to \mathrm{Diff}(F)$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} \Omega(M, x_0) \arrow[rr, "H"] \arrow[dr] & & \mathrm{Diff}(F) \\ & \pi_1(M, x_0) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Ao homomorfismo $h$ chama-se *holonomia* da conexão plana. Mostre que a holonomia determina a conexão, i.e, dado um homomorfismo de grupos

$$h : \pi_1(M, x_0) \to \mathrm{Diff}(F),$$

existe um fibrado vectorial $\pi : E \to M$ com fibra $F$ e com uma conexão plana $\mathcal{D}$ cuja holonomia é $h$.

PROBLEMAS BREVES (Resolva dois dos quatro problemas propostos)

5. Mostre que uma variedade simplesmente conexa é orientável

6. Mostre que a esfera $\mathbb{S}^7$ é paralelizável

7. Calcule o anel de cohomologia de de Rham de $\mathbb{CP}^n$.

8. Mostre que uma submersão $\pi : E \to M$, com fibras compactas e conexas, é localmente trivial.

**BOAS FÉRIAS!**