

A Quantização de Kontsevich

Pedro Vitória
3º ano da LMAC
pedrovitoria@ist.utl.pt

04 de Agosto de 2008

Resumo

A quantização é uma noção que nasce no seio da Mecânica Quântica. O problema da sua existência só em 1998 foi resolvido por Kontsevich num grande resultado, que entre outros, garantiram a atribuição de uma medalha Fields.

Neste artigo exploramos este problema, introduzindo o leitor nos tópicos necessário à compreensão do problema, nomeadamente Geometria de Poisson e Quantização por deformação. A ligação à Física está sempre presente. Através do integral de caminho apresentamos também a justificação (heurística) de Cattaneo e Felder que desmistificou a solução de Kontsevich.

O leitor deve ter presente que algumas passagens neste artigo são não-rigorosas. Fizemos um esforço por indicar sempre que tal aconteça.

1 Introdução

Foi no 23º congresso internacional de matemáticos em 1998 em Berlim que Kontsevich foi premiado com uma medalha Fields. A razão para a atribuição do prémio é a sua contribuição nas áreas de geometria algébrica, topologia e física-matemática, nomeadamente, a prova de uma conjectura de Witten, a construção de um invariante de nós e a quantização formal das variedades de Poisson. Este último resultado é talvez o seu mais conhecido e é ele o tema principal deste artigo.

O problema da quantização das variedades de Poisson tem grandes repercussões em Física, nomeadamente em Mecânica Quântica, e desde a década de 70 que estava em aberto. Antes de Kontsevich já se tinham feito alguns desenvolvimentos, nomeadamente já se tinha provado a quantização das variedades simplécticas, mas este problema, em toda a sua generalidade, continuava a desafiar os esforços da comunidade matemática e era já considerado um problema demasiado difícil. A solução de Kontsevich surgiu em 1997, [15], mas a sua origem permaneceu misteriosa até 1999, altura em que o artigo de Cattaneo e Felder, [16], lhe deu uma justificação, ainda que heurística.

Este artigo tem dois objectivos: primeiro enunciar correctamente o problema da quantização de variedades de Poisson, introduzindo para tal noções básicas de geometria de Poisson e de Quantização por Deformação; segundo responder parcial e heurísticamente, no espírito de Cattaneo e Felder, a este problema,

utilizando uma ferramenta que também introduzimos no artigo - o integral de caminho.

Começamos por introduzir o leitor à geometria de Poisson, muito por vias de exemplos, e de seguida apresentamos o integral de caminho. Segue-se uma secção onde se faz uma introdução à quantização por deformação e se enuncia o problema que Kontsevich resolveu. Em todas estas secções estão bem presentes conceitos e relações fortes com a Física, que aliás sempre esteve na origem de muitos dos desenvolvimentos destas teorias (bem como em muitas outras áreas da Matemática). A última secção prende-se com a justificação heurística para a fórmula de Kontsevich tal como Cattaneo e Felder sugeriram no seu artigo.

2 Geometria de Poisson

A equação de Newton para a Mecânica de um sistema em \mathbb{R}^N é uma equação diferencial de 2ª ordem:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = m\ddot{\mathbf{q}},$$

onde \mathbf{x} é a posição, m é a massa do sistema e $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = -\nabla V(\mathbf{q})$ é a força no ponto \mathbf{q} . Esta equação pode ser escrita como um sistema de $2N$ equações diferenciais de 1ª ordem em \mathbb{R}^{2N} :

$$\begin{cases} p_i = m\dot{q}_i \\ \dot{p}_i = F_i(\mathbf{q}) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

É usual em Mecânica introduzir-se o Hamiltoniano do sistema que neste caso não é mais do que a energia:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{p}|^2}{m} + V(\mathbf{q})$$

Utilizando-se o Hamiltoniano o sistema (1) pode escrever-se como

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N,$$

ou ainda

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \{q_i, H(\mathbf{q}, \mathbf{p})\} \\ \dot{p}_i = \{p_i, H(\mathbf{q}, \mathbf{p})\} \end{cases}, \quad (2)$$

onde

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right]$$

é um operador bidiferencial com as seguintes propriedades fundamentais:

- É anti-simétrico: $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
- Verifica a identidade de Leibniz: $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$,
- Verifica a identidade de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} = \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\}$.

Focando estas propriedades podemos abstrairmo-nos de \mathbb{R}^N e fazer a seguinte definição:

Definição 2.1. *Uma variedade de Poisson $(M, \{.,.\})$ é uma variedade diferenciável M tal que $C^\infty(M)$ está equipada com uma aplicação bilinear $\{.,.\}$ com as seguintes propriedades:*

- *É anti-simétrica: $\{f, g\} = -\{g, f\}$,*
- *Verifica a identidade de Leibniz: $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$,*
- *Verifica a identidade de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} = \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\}$.*

Exemplo 2.1. *Um exemplo importante que continuaremos a explorar ao longo desta secção é o de \mathbb{R}^3 com o seguinte parêntesis:*

$$\{f, g\}(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \cdot (\nabla f \times \nabla g)$$

Este é o parêntesis do corpo rígido que é um caso particular de um parêntesis de Lie-Poisson existente em qualquer dual de uma álgebra de Lie, \mathfrak{g}^ .*

As variedades de Poisson são o cenário natural para estudar a mecânica. Dado um sistema numa variedade de Poisson $(M, \{.,.\})$ com coordenadas locais x_1, \dots, x_N e um Hamiltoniano, H , a dinâmica é então determinada localmente pelo sistema

$$\dot{x}_i = \{x_i, H(\mathbf{x})\}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

que coincide com o sistema (2).

Exemplo 2.2. *No exemplo do corpo rígido em \mathbb{R}^3 utilizamos como coordenadas as componentes do momento angular $l_i = I_i \dot{\theta}_i$, onde I_i são constantes dependentes da distribuição de massa e forma do corpo - momentos de inércia principais - e $\dot{\theta}_i$ são as componentes da velocidade angular. Nestas coordenadas o parêntesis é o do Exemplo 2.1 e o hamiltoniano é*

$$H(l_1, l_2, l_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{l_1^2}{I_1} + \frac{l_2^2}{I_2} + \frac{l_3^2}{I_3} \right)$$

que constitui a energia cinética de rotação do corpo.

Se escrevermos o sistema (3) neste caso obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{l}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} l_2 l_3, \\ \dot{l}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} l_3 l_1, \\ \dot{l}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} l_1 l_2. \end{aligned}$$

Estas são as equações de Hamilton para o corpo rígido.

Não é evidente mas (3) é um sistema linear. Isto deve-se ao facto do parêntesis de Poisson verificar a identidade de Leibniz. Na verdade, localmente, pode mesmo escrever-se o parêntesis como

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \quad (4)$$

Note-se que se pode definir localmente o parêntesis pela matriz $\Pi = (\alpha_{ij})$.

Exemplo 2.3. No caso do parêntesis do corpo rígido:

$$\Pi(l_1, l_2, l_3) = \begin{pmatrix} 0 & l_3 & -l_2 \\ -l_3 & 0 & l_1 \\ l_2 & -l_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como seria de esperar esta matriz é anti-simétrica.

Note-se que $|\Pi| = 0$, ou seja, Π é singular em todos os pontos.

Dada uma variedade de Poisson, $(M, \{.,.\})$, localmente existem coordenadas canónicas nas quais a expressão (4) aparece bastante simplificada. Mais especificamente dado um ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existem coordenadas $q_i, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k, y_1, \dots, y_s$ em torno de \mathbf{x}_0 tais que

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = \{q_i, y_j\} = \{p_i, y_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij} \\ \{y_i, y_j\}(\mathbf{x}) &= \varphi_{ij}(y_1, \dots, y_s), \quad c/\varphi_{ij}(\mathbf{x}_0) = 0 \end{aligned}$$

ou seja, nestas coordenadas

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & I_{k \times k} & 0 \\ -I_{k \times k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{s \times s} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

onde I é a matriz identidade e S é função apenas de y_1, \dots, y_s c/ $S(\mathbf{x}_0) = 0$.

Exemplo 2.4. A matriz Π do exemplo 2.3 já se encontra na forma (5) com $S = \Pi|_{\mathbf{x}_0=0}$, ou seja, as coordenadas l_1, l_2, l_3 são canónicas na vizinhança da origem.

Para outro ponto qualquer vamos verificar que as coordenadas esféricas, (θ, ϕ, r) , são muito úteis, embora não sejam as coordenadas canónicas. Em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

e o gradiente escreve-se

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta,$$

com

$$\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi,$$

logo

$$\nabla f \times \nabla g = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r + (\dots) \mathbf{e}_\theta + (\dots) \mathbf{e}_\phi.$$

Daqui segue que:

$$\{f, g\} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right),$$

ou seja,

$$\Pi(\theta, \phi, r) = \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Nestas coordenadas é evidente que se $f = f(r)$ então $\{f, g\} = 0$ para qualquer g . Funções com esta propriedade dizem-se casimirs e têm a particularidade de serem conservadas pela dinâmica qualquer que seja o Hamiltoniano.

Um caso particular de variedades de Poisson é aquele em que Π é não-singular, ou seja, invertível, em todos os pontos de M . Nesse caso $S = 0$ logo a variedade tem dimensão $N = 2k$ e possui também uma forma-2 não-degenerada definida localmente por:

$$\omega(x) = \sum_{i,j=1}^N \alpha^{ij}(x) dx_i \wedge dx_j,$$

onde $\alpha^{ij}(x)$ é a entrada i, j de $\Omega(x) = \Pi(x)^{-1}$.

Manipulando-se alguns somatórios verifica-se que o facto de $\{.,.\}$ verificar a identidade de Jacobi é equivalente a que a forma ω assim definida seja fechada, ou seja, $d\omega = 0$, donde se conclui que neste caso M é também uma variedade simpléctica.

Definição 2.2. *Uma variedade simpléctica (M, ω) é uma variedade diferenciável equipada com uma forma-2 ω fechada e não-degenerada.*

Como acabámos de ver, qualquer variedade de Poisson com parêntesis não-singular é uma variedade simpléctica. Também é verdade que qualquer variedade simpléctica (M, ω) é de Poisson c/ parêntesis dado por

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^N \Omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

onde Ω^{ij} é a entrada i, j de Ω^{-1} e ω é dado localmente por

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^N \Omega_{ij}(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_j.$$

De facto esta relação é mais próxima e é um Teorema de Weinstein, [1], que qualquer variedade de Poisson, M , é uma foliação de variedades simplécticas, ou seja, existe uma decomposição de M em folhas simplécticas $(F_\alpha, \omega_\alpha)$, $M = \bigsqcup F_\alpha$, em que cada ω_α é obtido de $\Pi|_{F_\alpha}$, tal como explorado no exemplo seguinte:

Exemplo 2.5. *Vamos agora determinar a decomposição em folhas simplécticas de \mathbb{R}^3 com o parêntesis do corpo rígido. Cada folha simpléctica é preservada pela dinâmica tal como os casimirs.*

Neste caso as folhas simplécticas são as superfícies esféricas, ou seja, as superfícies de nível do raio: $F_r = S_r$. Para determinarmos a forma simpléctica, ω_r , em cada folha utilizamos as coordenadas canónicas e o bloco não-singular de Π .

No exemplo 2.4 não determinámos as coordenadas canónicas mas ainda assim Π ficou bloco-diagonal com o bloco 2×2 superior esquerdo invertível. Para obtermos Ω_r invertemos esse bloco:

$$\Omega_r(\theta, \phi) = r \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\omega_r(\theta, \phi) = 2r \sin \theta d\theta \wedge d\phi$$

Tem-se portanto:

$$(\mathbb{R}^3, \{.,.\}) = \bigsqcup_{r \in \mathbb{R}_0^+} (S_r, \omega_r)$$

Pode-se dizer que as geometrias simpléctica e de Poisson nasceram de mãos dadas em 1808-1810 com os trabalhos de Lagrange e Poisson. Poisson inventou os seus parêntesis em 1809 ao estudar o método de variação de constantes de Lagrange. Neste método de Lagrange, desenvolvido para estudar a mecânica celestial, aparece pela primeira vez uma estrutura simpléctica (embora o nome simpléctico lhe seja atribuído por Weyl quase cem anos mais tarde).

Foi Jacobi que mais tarde estudou propriedades algébricas do parêntesis de Poisson com mais cuidado, nomeadamente a identidade de Jacobi. Esta identidade vem a desempenhar um papel importante na teoria de grupos e álgebras de Lie desenvolvida por Lie que também estudou a geometria dos parêntesis de Poisson.

Mais recentemente a geometria de Poisson tem recebido uma maior atenção devido à sua ligação com inúmeras áreas, nomeadamente, mecânica de partículas e do contínuo, sistemas completamente integráveis, análise harmónica em grupos de Lie, etc...

Para uma perspectiva histórica sobre o aparecimento da geometria de Poisson com os trabalhos de Lagrange e Poisson remetemos o leitor para [2]. Para uma introdução à geometria de Poisson tem-se [1, 3] e como referência para a geometria simpléctica recomendamos [4]. Como referência sobre Mecânica com referências a geometria simpléctica e de Poisson temos [5].

3 Integral de caminho

Um integral de caminho, ou integral funcional, é um integral no espaço das funções e foi introduzido por Wiener em 1921 para estudar o movimento Browniano. Duas aplicações importantes destes integrais acontecem na área das probabilidades, no estudo de equações diferenciais parciais, e da Mecânica Quântica, através da formulação de Feynman. Nesta secção vamos introduzir o integral de caminho através da Mecânica Quântica, seguindo de perto [6]. Esta ferramenta vai desempenhar um papel importante na derivação heurística da fórmula de Kontsevich.

De acordo com a formulação de Schrödinger da Mecânica Quântica num determinado instante t a informação dum sistema quântico está codificada no seu estado quântico, ψ_t e este é um elemento (normalizado) do espaço de Hilbert das funções de quadrado somável, \mathcal{H} , i.e.

$$\psi_t \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

O estado quântico tem uma interpretação probabilística em que a sua norma, $\|\psi_t\|$, corresponde à função densidade de probabilidade relativa à posição do sistema.

A equação de Newton $F = ma$ que dá a evolução dos sistemas clássicos vai neste caso ter um análogo quântico, a equação de Schrödinger¹:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = \hat{H} \psi_t \\ \psi_0 = f \end{cases}, \quad (6)$$

onde $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V$ é um operador em \mathcal{H} dito o Hamiltoniano do sistema e f é uma função dada. Em \hat{H} o primeiro termo corresponde ao operador Energia Cinética e o segundo é representado por uma função $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, designada por potencial, que actua em \mathcal{H} por multiplicação e que depende do sistema em questão: no caso da partícula livre $V(x) = 0$, no caso do oscilador harmónico em \mathbb{R} , $V(x) = \frac{1}{2}m\omega x^2 \dots$

A solução de (6) é:

$$\psi_t = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} f$$

Por razões óbvias o operador $e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}$ é designado por operador de evolução. Por razões técnicas vamos fazer $t = -it'$ de modo que o operador de evolução se escreve

$$\hat{K}_{t'} = e^{-\frac{\hat{H}t'}{\hbar}}, \quad t' \geq 0 \quad (7)$$

Este truque tem o nome de rotação de Wick e é utilizado aqui para que a função obtida seja uma gaussiana integrável no espaço todo e não uma exponencial complexa. No fim de se fazerem as contas desfazemos o truque prolongando analiticamente a solução ao eixo imaginário. Daqui em diante trabalharemos sempre em tempo imaginário e portanto omitiremos a $'$ em t .

Para obter o integral de caminho temos de escrever o operador de evolução (7) na forma integral:

$$\left(\hat{K}_t \psi_0 \right) (\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (8)$$

onde $K_t : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é o núcleo de \hat{K}_t . Esta representação integral de \hat{K}_t é possível para classes muito gerais de V (C^∞ e limitada inferiormente).

Exemplo 3.1. *No caso da partícula livre ($V = 0$) o núcleo do operador de evolução é*

$$K_t(x, y) = \frac{1}{(2\pi t \hbar)^{N/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\hbar t}} \quad (9)$$

Vamos verificar que assim é quando $N = 1$. Neste caso, e em tempo imaginário, (6) escreve-se²

$$\begin{cases} \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_t \\ \psi_0 = f \end{cases},$$

¹A equação de Schrödinger pode ser interpretada como uma equação de difusão com constante de difusão imaginária

²Esta sim é uma verdadeira equação de difusão.

e pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, obtendo-se

$$\psi_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(p)e^{\frac{\sqrt{2E(p)}}{\hbar}x} + B(p)e^{-\frac{\sqrt{2E(p)}}{\hbar}x} \right) C(p)e^{\frac{E(p)t}{\hbar}} dp,$$

onde A, B, C, E são tais que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(p) \left(A(p)e^{\frac{\sqrt{2E(p)}}{\hbar}x} + B(p)e^{-\frac{\sqrt{2E(p)}}{\hbar}x} \right) dp$$

Aplicando (9) tem-se então:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y)\psi_0(y)dy &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(p)}{\sqrt{2\pi\hbar t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(p)e^{\frac{\sqrt{2E(p)}}{\hbar}y - \frac{(x-y)^2}{2\hbar t}} + B(p)e^{-\frac{\sqrt{2E(p)}}{\hbar}y - \frac{(x-y)^2}{2\hbar t}} \right) dy dp, \end{aligned}$$

e notando que

$$\begin{aligned} \pm \frac{\sqrt{2E}}{\hbar}y - \frac{(x-y)^2}{2\hbar t} &= -\frac{\left(y - (x + t\sqrt{2E})\right)^2}{2\hbar t} + \frac{tE}{\hbar} \pm \frac{\sqrt{2E}x}{\hbar} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= 1, \end{aligned}$$

concluimos que $\psi_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x, y)\psi_0(y)dy$.

No exemplo da partícula livre pode-se dar uma interpretação probabilística a (8) da seguinte maneira:

- $\psi_t(y)$ é a função densidade de probabilidade da posição da partícula no instante t .
- $K_t(x, y)$ é a probabilidade da partícula ir de y para x em t unidades de tempo.

Portanto a equação (8) não é mais do que uma aplicação do teorema das probabilidades condicionadas quando se condiciona na posição da partícula no instante 0.

Prosseguindo esta linha de pensamento é natural condicionar noutros instantes t_1, \dots, t_{n-1} o que nos leva a concluir que deverá ser válida a expressão:

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &= \int K_t(x, x_0)\psi_{t_0}dx_0 = \\ &= \int K_{t-t_{n-1}}(x, x_{n-1})\dots K_{t_1-t_0}(x_1, x_0)\psi_{t_0}(x_0)dx_0\dots dx_{n-1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} K_t(x, x_0) &= \int K_{t-t_{n-1}}(x, x_{n-1})\dots K_{t_1-t_0}(x_1, x_0)dx_1\dots dx_{n-1} \quad (10) \\ &= \int_{\gamma \in PL_{x_0, x}^{t_0, \dots, t_n}} K_{t-t_{n-1}}(\gamma(t_n), \gamma(t_{n-1}))\dots K_{t_1-t_0}(\gamma(t_1), \gamma(t_0))d\gamma, \end{aligned}$$

onde $t_n = t$ e $PL_{x_0, x}^{t_0, \dots, t_n}$ denota o espaço dos caminhos $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ que são lineares nos troços $[t_i, t_{i+1}]$ e que têm os extremos fixos $\gamma(t_0) = x_0, \gamma(t_n) = x$.

De facto (10) é válida e é consequência da propriedade de semi-grupo de \hat{K}_t :

$$\hat{K}_{t_1+t_2} = \hat{K}_{t_1} \circ \hat{K}_{t_2}$$

Substituindo (9) em (10) conclui-se que para a partícula livre

$$K_t(x, x_0) = \frac{1}{c_n} \int_{\gamma \in PL_{x_0, x}^{t_0, \dots, t_n}} e^{-\frac{1}{2\hbar} \sum_{j=1}^n \frac{(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))^2}{(t_j - t_{j-1})^2} (t_j - t_{j-1})} d\gamma, \quad (11)$$

onde $c_n = \prod_{j=1}^n (2\pi\hbar(t_j - t_{j-1}))^{-N/2}$.

Estamos interessados em saber o que acontece quando $n \rightarrow \infty$. Para tal notamos que, quando γ é diferenciável, o somatório em (11) constitui umas somas de Riemann de $f(t) = \dot{\gamma}(t)^2$ e portanto

$$\sum_{j=1}^n \frac{(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))^2}{(t_j - t_{j-1})^2} (t_j - t_{j-1}) \rightarrow \int_0^t \dot{\gamma}(s)^2 ds$$

Por outro lado quando n aumenta os caminhos de $PL_{x_0, x}^{t_0, \dots, t_n}$ aproximam-se de qualquer caminho e portanto será de esperar que no limite se possa dar sentido rigoroso à seguinte expressão:

$$K_t(x, x_0) = \frac{1}{c_\infty} \int_{\gamma \in \mathcal{P}_{x_0, x}^t} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t \frac{\dot{\gamma}(s)^2}{2} ds} d\gamma, \quad (12)$$

onde $\mathcal{P}_{x_0, x}^t$ designa o espaço dos caminhos $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^N$ que têm os extremos fixos $\gamma(t_0) = x_0, \gamma(t) = x$. Interpretamos interiormente a expressão

$$\frac{1}{c_\infty} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t \frac{\dot{\gamma}(s)^2}{2} ds} d\gamma,$$

como representando uma medida no espaço dos caminhos, mas devemos estar conscientes que esta expressão está desprovida de sentido matemático pois está mal definida. É no entanto possível definir uma medida rigorosa, $D\gamma$ no espaço dos caminhos que corresponde, num certo sentido, ao limite das medidas de (10) quando $n \rightarrow \infty$. Para tal é necessário utilizar a propriedade de semi-grupo de \hat{K}_t e invocar o Teorema de Kolmogorov, [7].

A fórmula (12) foi "derivada" para o caso da partícula livre, em que $V = 0$ e $S(\gamma) = \int_0^t \frac{\dot{\gamma}(s)^2}{2} ds$, onde S é o funcional acção em $\mathcal{P}_{x_0, x}^t$:

$$S(\gamma) = \int_0^t \frac{\dot{\gamma}(s)^2}{2} - V(\gamma(s)) ds$$

Será pois de esperar que para um sistema geral o núcleo do operador evolução seja "dado" por

$$K_t(x, x_0) = \frac{1}{c_\infty} \int_{\gamma \in \mathcal{P}_{x_0, x}^t} e^{-\frac{S(\gamma)}{\hbar}} d\gamma \quad (13)$$

Através de (13) obtém-se uma formulação para a mecânica Quântica alternativa à de Hamilton e análoga à formulação de Lagrange da mecânica clássica. Nesta formulação a fórmula para a evolução é obtida conjugando-se (13) e (8):

$$\psi_t(x) = \frac{1}{c_\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\gamma \in \mathcal{P}_{x_0, x}^t} \psi_0(x_0) e^{-\frac{S(\gamma)}{\hbar}} d\gamma dx_0,$$

ou seja, a evolução do sistema fica determinada por uma medida no espaço dos caminhos (ou espaço das histórias):

$$D\gamma = \frac{e^{-\frac{S(\gamma)}{\hbar}}}{c_\infty} d\gamma$$

Relembramos que esta expressão não tem significado e portanto deve ser tratada com cuidado.

Se tivermos um sistema que passa de x_0 , no instante t_0 , para x , no instante t , e tivermos um observável que depende da posição do sistema em n instantes de tempo, $f = f(\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n))$ então o seu valor esperado é dado por

$$\langle f \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \dots, x_n) \frac{K_{t-t_n}(x, x_n) \dots K_{t_1-t_0}(x_1, x_0)}{K_{t-t_0}(x, x_0)} dx_1 \dots dx_n$$

Esta expressão pode ser generalizada para funções mais gerais, $f : \mathcal{P}_{x_0, x}^t \rightarrow \mathbb{R}$, utilizando a medida $D\gamma$ devidamente normalizada:

$$\langle f \rangle = \int_{\gamma \in \mathcal{P}_{x_0, x}^t} f(\gamma) D\gamma$$

Note-se que se entendermos $(\mathcal{P}_{x_0, x}, D\gamma)$ como um espaço de probabilidade então $f : \mathcal{P}_{x_0, x}^t \rightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória e a expressão anterior é a definição de valor esperado.

Exemplo 3.2. *Vamos agora considerar o caso da partícula livre que se desloca de x_0 para x em 1 segundo e calcular o valor esperado da posição da partícula no instante t_1 ³.*

O observável é então $f(\gamma) = \gamma(t_1)$ e o seu valor esperado é:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= \int_{\mathbb{R}} x_1 \frac{K_{1-t_1}(x, x_1) K_{t_1}(x_1, x_0)}{K_1(x, x_0)} dx_1 \\ &= \frac{1}{K_1(x, x_0)} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t_1)\hbar}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2\hbar(1-t_1)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1\hbar}} e^{-\frac{(x_1-x_0)^2}{2\hbar t_1}} dx_1 \\ &= \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\hbar}}}{K_1(x, x_0) \sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar t_1(1-t_1)}} e^{-\frac{(x_1-(x_0+t_1(x-x_0)))^2}{2\hbar t_1(1-t_1)}} dx_1 \\ &= x_0 + t_1(x - x_0), \end{aligned}$$

o que corresponde ao resultado clássico.

Esta formulação da Mecânica Quântica através do integral de caminho foi desenvolvida por Feynman em 1948, [8], e provou-se muito útil nos desenvolvimentos posteriores da física teórica, nomeadamente em Teoria Quântica do Campo. Os seus problemas de definição fazem com que ainda hoje se investigue como se podem tornar estes métodos rigorosos.

³Na verdade a interpretação dos cálculos não é exactamente essa uma vez que fizemos a rotação de Wick e ainda não a desfizemos. O cálculo exacto daria mais trabalho.

4 Quantização por deformação

Vamos agora definir o que se entende por quantização por deformação e enunciar o problema que Kontsevich resolveu. As referências principais são [9] e [10]. Para uma referência mais introdutória ver [11].

Viu-se na secção anterior como se caracterizam os estados dos sistemas na mecânica quântica. Classicamente existem também grandezas que caracterizam o sistema e que podem ser medidos, tais como posição, velocidade, energia, etc. Estas grandezas são simplesmente funções do estado do sistema e têm o nome de observáveis.

Na Mecânica Quântica um observável é um operador hermitiano no espaço dos estados. Os resultados possíveis de se obter numa medição de um observável são os seus valores próprios. Note-se que quanticamente os observáveis não comutam em geral, contrariamente ao que acontece classicamente.

Um problema que se põe na passagem dos sistemas clássicos para os quânticos está relacionado com a escolha dos observáveis quânticos correspondentes aos clássicos, ou seja, dado um observável clássico f associar-lhe o observável quântico correspondente, \hat{f} . Esta escolha tem o nome de quantização.

Exemplo 4.1. *No caso em que o espaço de estados do sistema é \mathbb{R}^{2N} (com q_1, \dots, q_n a representarem as coordenadas posição e p_1, \dots, p_n a representarem as coordenadas momento) dois exemplos de observáveis clássicos muito importantes são os observáveis de posição e de momento que não são mais do que as projecções nas respectivas coordenadas.*

Quanticamente estes observáveis são operadores no espaço $L^2(\mathbb{R}^{2N})$ e na verdade:

- $\hat{q}_i f = q_i f$
- $\hat{p}_i f = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial q_i}$

Note-se que $\{q_i, p_i\} = 1$ e $[\hat{q}_i, \hat{p}_i] = i\hbar$ o que levou Dirac a fazer a seguinte definição:

Definição 4.1. *Seja $(M, \{\cdot, \cdot\})$ uma variedade de Poisson e seja $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ a sua álgebra de funções. Uma quantização é uma aplicação linear, $f \mapsto \hat{f}$ de \mathcal{A} para o espaço dos operadores lineares de um espaço de Hilbert, \mathcal{H} , tal que:*

- $\hat{1} = Id$;
- $[\hat{f}, \hat{g}] = \hbar i \widehat{\{f, g\}} + O(\hbar^2)^4$;

A *quantização de Weyl* estende a quantização começada no Exemplo 4.1 de uma forma simétrica, ou seja, a função $p_i q_i$, por exemplo, é enviada para $\frac{1}{2}(\hat{p}_i \hat{q}_i + \hat{q}_i \hat{p}_i)$. Mais geralmente

$$f \mapsto \hat{f} \equiv \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^{2N}} e^{-i(q \cdot \hat{p} + p \cdot \hat{q})} (\mathcal{F}f)(q, p) dq dp,$$

onde $\mathcal{F}f$ denota a transformada de Fourier de f :

$$(\mathcal{F}f)(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^{2N}} f(x, y) e^{i(q \cdot x + p \cdot y)} dx dy,$$

⁴Na definição original de Dirac os termos de ordem superior em \hbar foram omitidos mas estes são necessários.

e $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n)$ e $\hat{q} = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n)$.

Exemplo 4.2. Se $N = 1$ e $f(x, y) = e^{i(ax+by)}$ então:

$$(\mathcal{F}f)(q, p) = \delta(q+a)\delta(p+b)$$

logo

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(q\cdot\hat{p}+p\cdot\hat{q})} \delta(q+a)\delta(p+b) dq dp = e^{i(a\hat{q}+b\hat{p})},$$

como seria de esperar.

Através da quantização e da composição de operadores em \mathcal{H} induz-se uma operação, \star , em \mathcal{A} tal que $\widehat{f \star g} = \widehat{\hat{f}\hat{g}}$. Esta operação pode ser entendida como uma deformação do produto usual e foi assim que Moyal interpretou a quantização de Weyl. A expressão encontrada por Moyal para o produto correspondente à quantização de Weyl foi:

$$f \star_{\hbar} g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial q_1^j} \frac{\partial}{\partial p_2^j} - \frac{\partial}{\partial p_1^j} \frac{\partial}{\partial q_2^j} \right) \right)^n f(q_1, p_1) g(q_2, p_2) \Big|_{p_1=p_2=p, q_1=q_2=q}$$

Exemplo 4.3. Seja $N = 1$, $f = e^{iaq}$, $g = e^{ibp}$. Então:

$$\begin{aligned} f \star_{\hbar} g &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \right)^n e^{iaq_1} e^{ibp_2} \Big|_{p_1=p_2=p, q_1=q_2=q} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n \frac{\partial^n}{\partial q^n} e^{iaq} \frac{\partial^n}{\partial p^n} e^{ibp} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i\hbar ab}{2} \right)^n e^{iaq} e^{ibp} \\ &= e^{\frac{-i\hbar ab}{2}} e^{i(aq+bp)} \end{aligned}$$

e da mesma maneira:

$$g \star_{\hbar} f = e^{\frac{i\hbar ab}{2}} e^{i(aq+bp)}$$

Daqui conclui-se que:

$$\begin{aligned} [\hat{f}, \hat{g}] &= \widehat{\hat{f}\hat{g}} - \widehat{\hat{g}\hat{f}} \\ &= \widehat{f \star_{\hbar} g} - \widehat{g \star_{\hbar} f} \\ &= e^{i(a\hat{q}+b\hat{p})} \left(e^{\frac{-i\hbar ab}{2}} - e^{\frac{i\hbar ab}{2}} \right) \end{aligned}$$

Se expandirmos o produto de Moyal em torno de \hbar obtemos

$$\star_{\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n B_n,$$

onde:

- B_n são operadores bidiferenciais,

- $B_0(f, g) = fg$,
- $B_1(f, g) = \{f, g\}$,

o que realça o facto de que este produto é uma deformação do produto usual que em primeira ordem coincide com o parêntesis de Poisson. Somos então levados a fazer a seguinte definição:

Definição 4.2. *Seja $(M, \{, \})$ uma variedade de Poisson e $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ a sua álgebra associativa de funções. Um produto- \star_\hbar em \mathcal{A} é uma operação bilinear $\star_\hbar : \mathcal{A}[[\hbar]] \times \mathcal{A}[[\hbar]] \rightarrow \mathcal{A}[[\hbar]]$ tal que:*

1. \star_\hbar é linear: $(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \hbar^k) \star_\hbar (\sum_{l=0}^{\infty} g_l \hbar^l) = \sum_{k,l=0}^{\infty} (f_k \star_\hbar g_l) \hbar^{k+l}$;
2. \star_\hbar é associativo: $(f \star_\hbar g) \star_\hbar h = f \star_\hbar (g \star_\hbar h)$;
3. \star_\hbar é uma deformação do produto usual que coincide com $\{, \}$ na 1ª ordem:
 $f \star_\hbar g = fg + \{f, g\}\hbar + O(\hbar^2)$
4. \star_\hbar é um operador bidiferencial: $f \star_\hbar g = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(f, g) \hbar^k$ onde cada B_k é um operador bidiferencial.

Em geral os observáveis clássicos correspondem a funções numa variedade de Poisson, M , e portanto fazer a passagem para o sistema quântico corresponde a deformar "continuamente" em \hbar o produto de funções clássico associativo e comutativo num produto "quântico" ainda associativo mas não comutativo.⁵ Por outras palavras, a quantização corresponde à deformação em \hbar da álgebra dos observáveis clássicos na álgebra dos observáveis quânticos, ou seja, corresponde a encontrar um produto- \star em M . Levantam-se então três questões:

- Em que condições existem produtos- \star (não triviais)?
- Como os construir?
- Quantos existem?

As respostas a estas questões, nomeadamente à primeira, foram aparecendo com um grau de generalidade cada vez maior. Nos anos 70 a quantização foi conseguida para variedades simplécticas com algumas restrições técnicas. Essas restrições foram finalmente levantadas em 1983 quando De Wilde e Lecomte provam que qualquer variedade simpléctica admite um produto- \star não-trivial, [13]. O problema da quantização das variedades de Poisson foi inicialmente atacado "colando-se" as quantizações locais das suas folhas simplécticas. Utilizando este método Fedosov provou em 1994, [14], a existência da quantização nas variedades de Poisson regulares. Em 1997, depois de muitas tentativas falhadas por parte da comunidade matemática, Kontsevich respondeu com toda a generalidade a estas questões afirmando que qualquer variedade de Poisson admite produtos- \star não-triviais e classificando-os. No seu artigo, [15], exibiu uma fórmula explícita para o produto- \star e o objectivo da secção seguinte é derivar, por meios heurísticos, essa fórmula. A questão da classificação dos produtos- \star não será abordada.

⁵Daí o nome quantização por deformação. Existem, no entanto, outras maneiras de efectuar a quantização, nomeadamente a quantização geométrica, [12].

5 A Fórmula de Kontsevich

O objectivo desta secção é utilizar o integral de caminho para, heurísticamente, deduzir a fórmula para o produto- \star de Kontsevich. Este método deve-se a Cattaneo e Felder, [16], e tira partido da existência do produto de Moyal em \mathbb{R}^{2N} . O procedimento é o seguinte:

1. Obter uma fórmula integral para o produto de Moyal.
2. Interpretar essa fórmula integral e reescrevê-la na forma de um integral de caminho.
3. Generalizar essa fórmula para variedades simplécticas e depois para variedades de Poisson.
4. Utilizar técnicas de cohomologia equivariante, teoria quântica do campo e aproximação semi-clássica para obter finalmente o operador bidiferencial correspondente ao produto- \star .⁶

Note-se que neste percurso as passagens pelo integral de caminho serão não rigorosas servindo apenas para intuir e obter a fórmula final que então por métodos rigorosos se verifica estar correcta. Começamos por apresentar uma fórmula integral para o produto- \star de Moyal que utilizaremos para efectuar sucessivas generalizações.

Proposição 5.1. *Sejam $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2N})$ com suporte compacto e ω a forma simpléctica usual em \mathbb{R}^{2N} . Então*

$$(f \star_{\hbar} g)(a) \sim \int_{\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}} (\pi\hbar)^{-2N} f(x_2)g(x_1)e^{\frac{2i}{\hbar}\omega(x_1-a, x_2-a)} dx_1 dx_2, \quad (14)$$

para $\hbar \rightarrow 0$, uniformemente em qualquer compacto.

Demonstração. Seja Ω a representação matricial de ω e considere-se $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}$, $x_i = (q_i^1, \dots, q_i^N, p_i^1, \dots, p_i^N)$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix}$. Então Q é simétrica, não-singular, $Q^{-1} = Q$ e $x^T Q x = x_1^T \Omega x_2 - x_2^T \Omega x_1 = 2\omega(x_1, x_2)$.

Seja

$$I(a, \hbar) = \int_{\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}} (\pi\hbar)^{-2N} f(x_2)g(x_1)e^{\frac{2i}{\hbar}\omega(x_1-a, x_2-a)} dx_1 dx_2.$$

Fazendo $h(x, a) = f(x_2 + a)g(x_1 + a)$ obtém-se:

$$\begin{aligned} I(a, \hbar) &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}} (\pi\hbar)^{-2N} e^{\frac{i}{\hbar}(x-(a,a))^T Q (x-(a,a))} h(x - (a, a), a) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N}} (\pi\hbar)^{-2N} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{x^T Q' x}{2}} h(x, a) dx, \end{aligned}$$

onde $Q' = 2Q$.

⁶Esta passagem não será feita. Apresentaremos simplesmente a fórmula final.

Logo aplicando a proposição 1.2.4 de [17, p. 14]:

$$\begin{aligned} I(a, \hbar) &\sim (\pi\hbar)^{-2N} (2\pi\hbar)^{2N} |\det Q'|^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn } Q'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k}{k!} (R^k h)(0, a) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k}{k!} (R^k h)(0, a), \end{aligned}$$

onde $\text{sgn } Q' = \#\{\text{val. pps positivos de } Q'\} - \#\{\text{val. pps negativos de } Q'\} = 0$
e $R = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} Q'^{-1} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{i}{2} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial q_1^j} \frac{\partial}{\partial p_2^j} - \frac{\partial}{\partial p_1^j} \frac{\partial}{\partial q_2^j} \right)$ logo

$$\begin{aligned} I(a, \hbar) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i\hbar}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial q_1^j} \frac{\partial}{\partial p_2^j} - \frac{\partial}{\partial p_1^j} \frac{\partial}{\partial q_2^j} \right) \right)^k \left. f(x_1)g(x_2) \right|_{x_1=x_2=a} \\ &= (f \star_{\hbar} g)(a) \end{aligned}$$

□

Para simplificação de (14) e das fórmulas seguintes é útil considerar uma outra medida: $d\tilde{x}_i = (\pi\hbar)^{-N} dx_i$.

Vamos agora provar um lema que servirá para reescrever (14).

Lema 5.1. *Se Γ é um polígono em \mathbb{R}^{2N} com m vértices, $\{x_0, \dots, x_{m-1}\}$, então a sua área simpléctica é*

$$\int_{\Gamma} i^* \omega = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \omega(x_i, x_{i+1}),$$

onde consideramos $x_m = x_0$.

Demonstração. Em \mathbb{R}^{2N} ω é exacta:

$$\omega = \sum_i dq^i \wedge dp^i = d\eta, \text{ onde } \eta = \sum_i q_i dp_i,$$

logo pelo Teorema de Stokes:

$$\int_{\Gamma} i^* \omega = \int_{\partial\Gamma} i^* \eta,$$

onde $i : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ é a inclusão.

Vamos calcular o integral da direita para um segmento de recta e daí concluir o resultado pretendido. Se $a = (q_1^a, \dots, q_N^a, p_1^a, \dots, p_N^a)$ e $b = (q_1^b, \dots, q_N^b, p_1^b, \dots, p_N^b)$ então:

$$\begin{aligned} \int_{ab} i^* \eta &= \sum_i \int_{ab} i^*(q_i dp_i) = \sum_i \int_0^1 (q_i^b + (1-t)q_i^a)(p_i^b - p_i^a) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_i [(q_i^a p_i^b - p_i^a q_i^b) + (q_i^b p_i^b - q_i^a p_i^a)] \\ &= \frac{1}{2} \left(\omega(a, b) + \sum_i (q_i^b p_i^b - q_i^a p_i^a) \right) \end{aligned}$$

Daqui segue que:

$$\int_{\partial\Gamma} i^* \eta = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\overline{x_i x_{i+1}}} i^* \eta = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \omega(x_i, x_{i+1}) \right)$$

□

Note-se que $\omega(x_1 - a, x_2 - a) = \omega(x_1, x_2) + \omega(x_2, a) + \omega(a, x_1)$ e que

$$\int_{\Delta_{ax_1x_2}} i^* \omega = \int_{\Gamma} \phi^* \omega,$$

onde Γ é o triângulo standard em \mathbb{R}^2 c/ vértices $0, e_1, e_2$ e $\phi: \Gamma \rightarrow \Delta_{ax_1x_2}$ é um PLH⁷ em que $0 \mapsto a, e_1 \mapsto x_1, e_2 \mapsto x_2$.

Uma função PLH, $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$, tal que $\phi(0) = a$ está fixo fica determinada pelos seus valores em e_1 e e_2 logo pode-se reescrever (14) como

$$(f \star_{\hbar} g)(a) = \int_{\{\phi \in \text{LinearMap}(\Gamma, \mathbb{R}^{2N}): \phi(0)=a\}} f(\phi(e_2))g(\phi(e_1))e^{\frac{4i}{\hbar} \int_{\Gamma} \phi^* \omega} D\phi$$

Note-se que o factor $(\pi\hbar)^{-2N}$ está incorporado em $D\phi$. Utilizando o lema seguinte podemos replicar este raciocínio para qualquer polígono com um número ímpar de vértices.

Lema 5.2. *Sejam $x_0, \dots, x_{2m+2} \in \mathbb{R}^{2N}$. Então:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2(m+1)} \times 2N} f(x_1)g(x_2)e^{\alpha i \sum_{i=0}^{2(m+1)} \omega(x_i, x_{i+1})} \prod_{i=1}^{2(m+1)} d\tilde{x}_i &= \\ &= \left(\frac{2}{\alpha\hbar}\right)^{2Nm} \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2N}} f(x_1)g(x_2)e^{\alpha i \sum_{i=0}^2 \omega(x_i, x_{i+1})} d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2, \end{aligned}$$

onde se identifica $x_{2m+3} \equiv x_0$.

Demonstração. Basta notar que:

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} e^{\alpha i (\omega(x_{2m+1}, x_{2m+2}) + \omega(x_{2m+2}, x_0))} d\tilde{x}_{2m+2} = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{2N} (\pi\hbar)^{-n} \delta(x_0 - x_{2m+1}),$$

e portanto, integrando primeiro por x_{2m+2} e depois por x_{2m+1} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2(m+1)} \times 2N} f(x_1)g(x_2)e^{\alpha i \sum_{i=0}^{2(m+1)} \omega(x_i, x_{i+1})} \prod_{i=1}^{2(m+1)} d\tilde{x}_i &= \\ &= \left(\frac{2}{\alpha\hbar}\right)^{2N} \int_{\mathbb{R}^{2m \times 2N}} f(x_1)g(x_2)e^{\alpha i \sum_{i=0}^{2m} \omega(x_i, x_{i+1})} \prod_{i=1}^{2m} d\tilde{x}_i, \end{aligned}$$

donde, por indução, sai o resultado pretendido. □

No caso da fórmula (14) $\alpha = \frac{2}{\hbar}$ logo o lema anterior aparece simplificado.

Tem-se então, pelo lema 5.1, que se Γ é um polígono com m lados inscrito no disco unitário $D \subset \mathbb{R}^2$ ($m > 1$ ímpar) e $0, 1, \infty$ são três vértices distintos de Γ :

$$(f \star_{\hbar} g)(a) = \int_{\{\phi \in \text{LinearMap}_m(\Gamma, \mathbb{R}^{2N}): \phi(\infty)=a\}} f(\phi(0))g(\phi(1))e^{\frac{4i}{\hbar} \int_{\Gamma} \phi^* \omega} D\phi \quad (15)$$

⁷Do inglês piecewise linear homeomorphism.

A fórmula (15) para o produto de Moyal faz uso da estrutura linear de \mathbb{R} e portanto ainda não está na forma pretendida, i.e., ainda não é generalizável a outras variedades. Para tal teremos de a reescrever outra vez.

Deverá ser mais ou menos óbvio nesta fase que o objectivo é deixar cair a expressão LinearMap e reformular (15) integrando no espaço de todas as funções. Para tal fazemos, heurísticamente, o limite $m \rightarrow \infty$ e escrevemos o produto de Moyal na forma dum integral de caminho:

$$(f \star_{\hbar} g)(a) = \int_{\left\{ \begin{array}{l} \phi: D \rightarrow \mathbb{R}^{2N}, \\ \phi(\infty) = a \end{array} \right\}} f(\phi(0))g(\phi(1))e^{\frac{4i}{\hbar} \int_D \phi^* \omega} D\phi \quad (16)$$

Agora note-se que se pode generalizar (16) a qualquer variedade simpléctica (M, ω) obtendo-se então uma fórmula candidata para o produto- \star para variedades simplécticas:

$$(f \star_{\hbar} g)(a) = \int_{\left\{ \begin{array}{l} \phi: D \rightarrow M, \\ \phi(\infty) = a \end{array} \right\}} f(\phi(0))g(\phi(1))e^{\frac{4i}{\hbar} \int_D \phi^* \omega} D\phi \quad (17)$$

Feita a ponte com as variedades simplécticas falta-nos agora fazer a passagem para as variedades de Poisson. Para tal recordamos que uma variedade simpléctica possui também um parêntesis de Poisson dado por

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{2N} \alpha_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

onde a matriz (α_{ij}) é a inversa de Ω . Vamos tirar partido deste facto e fazendo uma passagem análoga a uma transformada de Fourier vamos reescrever (17) dependendo da matriz de Poisson (α_{ij}) e não de ω .

Recorde-se a transformada de Fourier da Gaussiana:

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{x^T A x}{2}} e^{iy \cdot x} dx = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\det A}} \right)^N e^{-\frac{y^T A^{-1} y}{2}} \quad (18)$$

No nosso caso o contexto é o de uma variedade simpléctica (M, ω) e portanto a passagem não será tão simples. O lado esquerdo de (18) deve ser interpretado como o análogo do caso das variedades de Poisson e o direito como análogo do caso das variedades simplécticas, sendo que a passagem do primeiro para o segundo é feita integrando-se pela variável x . Em (17) ϕ está a desempenhar o papel de y e para se obter a expressão para variedades de Poisson vamos acrescentar uma integração correspondente à integração por x em (18). Essa integração será feita no espaço de todas as formas-1, η , com valores no espaço cotangente de M ao longo de ϕ , ou seja, localmente:

$$\eta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2N} \eta_i(\mathbf{x}) dy_i |_{\phi(\mathbf{x})},$$

$$\eta_i(\mathbf{x}) = \eta_i^1(\mathbf{x}) dx_1 + \eta_i^2(\mathbf{x}) dx_2,$$

onde x_1, x_2 e y_1, \dots, y_{2N} são coordenadas locais de D e M , respectivamente.

A expressão integral para o produto \star numa variedade de Poisson é então

$$(f \star_{\hbar} g)(a) = \int_{\left\{ \begin{array}{l} \phi: D \rightarrow M, \\ \phi(\infty) = a \end{array} \right\}} \int_{\eta \in \phi^*(T^*M) \otimes T^*D} f(\phi(0))g(\phi(1))e^{\frac{16i}{\hbar}S[\phi, \eta]} D\eta D\phi, \quad (19)$$

onde

$$S[\phi, \eta] = \int_D \sum_{i=1}^{2N} \eta_i(\mathbf{x}) \wedge d\phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i,j=1}^{2N} \alpha_{ij}(\phi(\mathbf{x})) \eta_i(\mathbf{x}) \wedge \eta_j(\mathbf{x}) \quad (20)$$

Vamos agora verificar heurísticamente que no caso em que Π é não singular ao integrarmos por η recuperamos a fórmula anterior (17). Para isso vamos interpretar (20) como uma soma:

$$S[\phi, \eta] = \sum_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_{i=1}^{2N} \eta_i(\mathbf{x}) \wedge d\phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i,j=1}^{2N} \alpha_{ij}(\phi(\mathbf{x})) \eta_i(\mathbf{x}) \wedge \eta_j(\mathbf{x}) \right\}, \quad (21)$$

e vamos determinar todos os seus termos e reescreve-los numa forma mais sugestiva. Omitindo o ponto \mathbf{x} tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \wedge d\phi_i &= \sum_{i=1}^{2N} (\eta_i^1 \partial_2 \phi_i - \eta_i^2 \partial_1 \phi_i) dx_1 \wedge dx_2 = \frac{\hbar}{16} \eta \cdot \partial \phi \\ \sum_{i,j=1}^{2N} (\alpha_{ij} \circ \phi) \eta_i \wedge \eta_j &= \sum_{i,j=1}^{2N} (\alpha_{ij} \circ \phi) (\eta_i^1 \eta_j^2 - \eta_i^2 \eta_j^1) dx_1 \wedge dx_2 = \frac{i\hbar}{32} \eta^T \cdot (\Pi' \circ \phi) \cdot \eta \end{aligned}$$

onde

$$\eta(\mathbf{x}) = \frac{16}{\hbar} \begin{pmatrix} \eta^1(\mathbf{x}) \\ \eta^2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \partial \phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_2 \phi(\mathbf{x}) \\ -\partial_1 \phi(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \Pi'(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{8i} \begin{pmatrix} 0 & \Pi(\mathbf{x}) \\ -\Pi(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Com esta notação (21) escreve-se como

$$S[\phi, \eta] = \sum_{\mathbf{x}} \frac{\hbar}{16} \left(\eta(\mathbf{x}) \cdot \partial \phi(\mathbf{x}) + \frac{i}{2} \eta(\mathbf{x})^T \cdot (\Pi' \circ \phi)(\mathbf{x}) \cdot \eta(\mathbf{x}) \right),$$

ou ainda

$$S[\phi, \eta] = \frac{\hbar}{16} \eta \cdot \partial \phi + \frac{i\hbar}{32} \eta^T \cdot (\Pi' \circ \phi) \cdot \eta,$$

onde

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta(\mathbf{x}_1) \\ \eta(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \partial \phi = \begin{pmatrix} \partial \phi(\mathbf{x}_1) \\ \partial \phi(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \Pi' = \begin{pmatrix} \Pi'(\mathbf{x}_1) & 0 & \cdots \\ 0 & \Pi'(\mathbf{x}_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Substituindo em (19) obtemos a seguinte fórmula para o produto \star em variedades de Poisson:

$$(f \star_{\hbar} g)(a) = \int_{\left\{ \begin{array}{l} \phi: D \rightarrow M, \\ \phi(\infty) = a \end{array} \right\}} \int_{\eta \in \phi^*(T^*M) \otimes T^*D} f(\phi(0))g(\phi(1))e^{i\eta \cdot \partial \phi - \frac{1}{2} \eta^T \cdot (\Pi' \circ \phi) \cdot \eta} D\eta D\phi,$$

e se Π' for invertível, ou seja, se a variedade for simpléctica podemos integrar por η para obter:

$$(f \star_{\hbar} g)(a) = \xi \int_{\left\{ \begin{array}{l} \phi: D \rightarrow M, \\ \phi(\infty) = a \end{array} \right\}} f(\phi(0))g(\phi(1))e^{-\frac{1}{2}\partial\phi^T \cdot (\Pi' \circ \phi)^{-1} \cdot \partial\phi} D\phi, \quad (22)$$

onde

$$\Pi'^{-1} = \begin{pmatrix} \Pi'(\mathbf{x}_1)^{-1} & 0 & \cdots \\ 0 & \Pi'(\mathbf{x}_2)^{-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \Pi'(\mathbf{x})^{-1} = \frac{8i}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega(\mathbf{x}) \\ \Omega(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

e ξ é uma constante.

Note-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial\phi^T \cdot (\Pi' \circ \phi)^{-1} \cdot \partial\phi &= \frac{4i}{\hbar} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{i,j=1}^{2N} \Omega_{ij}(\phi(\mathbf{x})) (\partial_2\phi_i(\mathbf{x})\partial_1\phi_j(\mathbf{x}) - \partial_1\phi_i(\mathbf{x})\partial_2\phi_j(\mathbf{x})) \\ &= -\frac{4i}{\hbar} \int_D \phi^* \omega, \end{aligned} \quad (23)$$

pois

$$\phi^* \omega(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{2N} \Omega_{ij}(\phi(\mathbf{x})) (\partial_1\phi_i(\mathbf{x})\partial_2\phi_j(\mathbf{x}) - \partial_2\phi_i(\mathbf{x})\partial_1\phi_j(\mathbf{x})) dx_1 \wedge dx_2$$

Substituindo (23) em (22) obtém-se

$$(f \star_{\hbar} g)(a) = \xi \int_{\{\phi \in \text{Map}(D, M) : \phi(\infty) = a\}} f(\phi(0))g(\phi(1))e^{\frac{4i}{\hbar} \int_D \phi^* \omega} D\phi,$$

que, a menos de ξ , é a expressão que já tínhamos obtido para o produto \star em variedades simplécticas, (17).

A expressão integral (19) para o produto \star em variedades de Poisson não foi a que Kontsevich apresentou no seu artigo, pois esta ainda apresenta problemas de definição. Aplicando técnicas de cohomologia equivariante, teoria quântica do campo e aproximação semi-clássica mostra-se que (19) é equivalente à fórmula de Kontsevich, (24). Antes de exibirmos a fórmula de Kontsevich precisamos da noção de diagrama:

Definição 5.1. *Um diagrama, Γ , de ordem n é um par ordenado⁸ (v_1, v_2) de aplicações $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n+2\}$ tais que $v_a(i) \neq i$.*

Exemplo 5.1. *Diagrama de ordem 3:*

$$\Gamma = (\{1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1\}, \{1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 4\})$$

A cada diagrama de ordem n , $\Gamma = (v_1, v_2)$ podemos associar um operador bidiferencial $D_{\Gamma, \alpha}$ numa variedade de Poisson M de dimensão N definido por

$$D_{\Gamma, \alpha}(f, g) = \sum_{i_1, j_1=1}^N \cdots \sum_{i_n, j_n=1}^N \mathbf{D}_{\Gamma} \bullet \mathbf{a}_{\alpha}(f, g),$$

⁸Também pode ser entendido como um grafo, [15].

onde

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_\Gamma)_i &= (\partial_{j_n})^{\delta_i(v_2(n))} \dots (\partial_{j_1})^{\delta_i(v_2(1))} (\partial_{i_n})^{\delta_i(v_1(n))} \dots (\partial_{i_1})^{\delta_i(v_1(1))} \\ \mathbf{a}_\alpha(f, g) &= (\alpha_{i_1 j_1}, \dots, \alpha_{i_n j_n}, f, g)^T \\ \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} &= \prod_i \mathbf{v}_i \mathbf{w}_i \end{aligned}$$

Exemplo 5.2. Se Γ é o diagrama do exemplo anterior então:

$$\mathbf{D}_\Gamma = (\partial_{i_3}, 1, \partial_{i_2}, \partial_{j_3} \partial_{j_1} \partial_{i_1}, \partial_{j_2}),$$

e

$$D_{\Gamma, \alpha}(f, g) = \sum_{i_1, j_1=1}^N \sum_{i_2, j_2=1}^N \sum_{i_3, j_3=1}^N (\partial_{i_3} \alpha_{i_1 j_1}) (\alpha_{i_2 j_2}) (\partial_{i_2} \alpha_{i_3 j_3}) (\partial_{j_3} \partial_{j_1} \partial_{i_1} f) (\partial_{j_2} g)$$

Vamos associar a cada diagrama de ordem n , $\Gamma = (v_1, v_2)$, um peso, w_Γ calculado como se segue. Seja $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ o semi-plano superior e $\mathcal{H}_n = \{z_1, \dots, z_n \in \mathcal{H} : z_i \neq z_j\}$. Considere-se $\phi : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ definida por⁹

$$\phi(z_1, z_2) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - z_1)}{(z_2 - \bar{z}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)} \right),$$

extendida por continuidade a $z_1, z_2 \in \mathbb{R}, z_1 \neq z_2$. Então

$$w_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^n n!} \int_{\mathcal{H}_n} \bigwedge_{i=1}^n d\phi(z_i, z_{v_1(i)}) \wedge d\phi(z_i, z_{v_2(i)}),$$

onde se considera $z_{n+1} = 0, z_{n+2} = 1$.

Da definição sai imediatamente que se $\Gamma = (v_1, v_2)$ e existe um i tal que $v_1(i) = v_2(i)$ então $w_\Gamma = 0$.

Exemplo 5.3. Se $n = 1$ só há dois diagramas com peso não-nulo. São eles

- $\Gamma_1 = (\{1 \rightarrow 2\}, \{1 \rightarrow 3\})$,
- $\Gamma_2 = (\{1 \rightarrow 3\}, \{1 \rightarrow 2\})$,

e basta calcular um deles pois é imediato da fórmula que o outro será simétrico. Obtém-se então $w_{\Gamma_1} = -w_{\Gamma_2} = -\frac{1}{2}$.

Desenvolvida a notação podemos então enunciar o

Teorema 5.1 (Kontsevich, [15]). *Seja $(M, \{.,.\})$ uma variedade de Poisson com parêntesis definido localmente por (α_{ij}) . Então a fórmula¹⁰*

$$f \star_{\hbar} g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n \sum_{\Gamma \text{ de ordem } n} w_\Gamma D_{\Gamma, \alpha}(f, g), \quad (24)$$

define um produto associativo em $C^\infty(M)$.

⁹Para uma intuição geométrica sobre esta fórmula ver [15]

¹⁰Em [15] aparece \hbar^n em vez de $\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n$. A nossa fórmula coincide com a de [16] em que é utilizada a notação da literatura em Física.

Note-se que os pesos w_Γ são universais no sentido em que não dependem de α .

Exemplo 5.4. Para determinar o coeficiente de \hbar em (24) apenas temos de determinar $D_{\Gamma_1, \alpha}$ e $D_{\Gamma_2, \alpha}$, onde Γ_1 e Γ_2 são os diagramas do exemplo anterior. Tem-se então

- $D_{\Gamma_1, \alpha}(f, g) = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \partial_i f \partial_j g = \{f, g\},$
- $D_{\Gamma_2, \alpha}(f, g) = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \partial_j f \partial_i g = - \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ji} \partial_j f \partial_i g = -\{f, g\},$

logo

$$f \star g = fg + \frac{i\hbar}{2} \{f, g\} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n \sum_{\Gamma \text{ de ordem } n} w_\Gamma D_{\Gamma, \alpha}(f, g).$$

O artigo de Kontsevich escrito em 1997, [15], teve grande impacto na comunidade científica. No entanto não era compreensível como se tinha obtido a fórmula (24), que como o leitor já se deve ter apercebido é enorme e difícil de calcular. A sua origem permaneceu um mistério até Cattaneo e Felder a desmistificarem em 1999 com o seu artigo, [16], por um método que foi esboçado nesta secção. A falta de rigor destes métodos fez com que qualquer referência aos mesmos fosse omitida no artigo de Kontsevich. Também seria de esperar que assim fosse pois, afinal de contas, este resultado, entre outros, justificou a entrega de uma medalha Fields, pelo que a sua demonstração teria de ter todo o rigor.

Referências

- [1] A. Weinstein. The Local Structure of Poisson Manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 18:523–557, 1983.
- [2] C. Marle. The inception of Symplectic Geometry: the works of Lagrange and Poisson during the years 1808–1810. Lausanne, Switzerland, 2008. Poisson Geometry in Mathematics and Physics. Available from: <http://cib.epfl.ch/hosted/programs/poisson2008/cms/fileadmin/misc/sourcesympengl.pdf>.
- [3] A. Weinstein. Poisson geometry. *Differential Geometry and its Applications*, 9(1):213–238, Aug 1998. Available from: <http://math.berkeley.edu/%7Ealanw/Poisson.tex>.
- [4] A. Cannas. *Lectures on Symplectic Geometry*, volume 1764 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2001.
- [5] Jerrold E. Marsden and Tudor S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Number 17 in Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, NY, second edition, 1999.
- [6] J. C. Mourão. Aspects of the connections between path integrals, quantum field theory, topology and geometry. *Publicaciones de la Real Sociedad Matemática Española*, 7:3–51, 2004. Lectures at the XII Fall Workshop on Geometry and Physics, Coimbra, 2003. Available from: <http://www.math.ist.utl.pt/~jmourao/PI.ps>.

- [7] Y. Yamasaki. *Measures on infinite dimensional spaces*. World Scientific, Singapore, 1985.
- [8] R. P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20(2):367–387, Apr 1948. doi:10.1103/RevModPhys.20.367.
- [9] R. L. Fernandes. Deformation quantization and poisson geometry. *Resenhas IME-USP*, 4(3):327–361, 2000.
- [10] A. Cannas and A. Weinstein. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*. American Mathematical Society, 1999. Available from: http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/Books/models_final.pdf.
- [11] G. Karaali. *Deformation Quantization: A Brief Survey*. Available from: <http://math.berkeley.edu/~alanw/242papers99/karaali.pdf>.
- [12] N. M. J. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Oxford, 1997.
- [13] P. B. A. Lecomte and M. Wild. Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds. *Letters in Mathematical Physics*, 7(6):487–496, 1983. doi: 10.1007/BF00402248.
- [14] B. V. Fedosov. A simple geometrical construction of deformation quantization. *Journal of Differential Geometry*, 40(2):213–238, 1994.
- [15] M. Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds, I. September 1997. [arXiv:q-alg/9709040](https://arxiv.org/abs/q-alg/9709040).
- [16] A. S. Cattaneo and G. Felder. A Path Integral Approach to the Kontsevich Quantization Formula. *Communications in Mathematical Physics*, 212:591–611, 2000. [arXiv:math/9902090](https://arxiv.org/abs/math/9902090).
- [17] J. J. Duistermaat. *Fourier Integral Operators*. Birkhauser, Boston, Mass., 1942.