

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas sobre as últimas aulas teóricas e revisões

14ª Semana

1. Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (*)$$

- a) Sejam p e q duas funções de classe $\mathcal{C}^2$ definidas em $\mathbb{R}$. Mostre que a função

$$u(t, x) = p(xe^t) + q(xe^{-t}) \quad (**)$$

é solução de (*).

- b) Baseando-se no resultado da alínea anterior determine a solução de (*) que satisfaz as seguintes condições iniciais:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = e^{-x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0.$$

- c) Mostre que qualquer solução de classe $\mathcal{C}^2$ de (*) tem a forma (**).

2. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com as condições:} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 & \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y) \\ u(0, 0) = 0 \end{cases}$$

para $x, y \in [0, 1]$.

3. Diga qual das funções seguintes é solução da equação $\frac{d^4 y}{dt^4} + 4y = 5e^{2t}$.

- ☐ $y(t) = e^t \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{4}e^{2t}$
☐ $y(t) = t^2 e^{2t} + \frac{t}{20}e^{2t}$
☐ $y(t) = e^t \sin(t) + \frac{1}{4}e^{2t}$
☐ $y(t) = e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{t}{20}e^{2t}$

4. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = 3x - y + \operatorname{sen} t \\ y' = 2x - e^t \end{cases}$$

Então

- ☐ $y'' - 3y' + 2y = 2e^t + 2 \operatorname{sen} t.$
- ☐ $y'' - 3y' + y = 2e^t + 2 \operatorname{sen} t.$
- ☐ $y'' - 3y' + y = e^t + \operatorname{sen} t.$
- ☐ $y'' - 3y' + 2y = e^t + \operatorname{sen} t.$

5. Seja $u(t, x) = T(t)X(x)$ uma solução separada (não trivial) do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(t, 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

Então, com $n \in \mathbb{N}_0$ e a menos de uma constante multiplicativa, temos:

- ☐ $X(x) = e^x \operatorname{sen}(2nx)$
- ☐ $X(x) = e^x \cos(nx)$
- ☐ $X(x) = e^{2x} \cos(2nx)$
- ☐ $X(x) = e^{2x} \cos(nx)$

6. A série de Fourier da função $f(x) = \pi - |x|$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, é:

- ☐ $\frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}[2n\pi x].$
- ☐ $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x].$
- ☐ $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x].$
- ☐ $\frac{\pi}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos[2nx].$

7. Determine a solução contínua $u(t, x)$ do seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + e^x & \text{para } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\\ u(t, 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 & \text{e} \quad u(t, \pi) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = (\pi + 1 - x) e^x & \text{para } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

Note: pode (e deve) utilizar as respostas das questões **5** e **6**.

8. Utilize métodos de redução de ordem para calcular as soluções dos seguintes problemas de valor inicial, indicando o respectivo intervalo máximo de definição.

- (a) $y'' = 2yy'$, com $y(0) = y'(0) = 1$.
 (b) $y'' = 2e^{t^2} + 2ty'$, com $y(0) = y'(0) = 0$.

9. Diga qual das funções seguintes é solução da equação $\frac{d^5 y}{dt^5} + \frac{d^2 y}{dt^2} = t$.

- ☐ $y(t) = e^{-t} + t$
☐ $y(t) = t e^{-t} + t$
☐ $y(t) = e^{\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + 1 + \frac{t^3}{6}$
☐ $y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + t + \frac{t^3}{6}$

10. A série de Fourier da função $f(x) = \cos^3 x$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, é:

- ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n+1}}{4} \cos[(2n+1)x].$ ☐ $\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$
☐ $\frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n+1}}{4} \cos[(2n+1)x].$ ☐ $\frac{1}{4} \cos x + \frac{3}{4} \cos 3x.$

11. Seja $u(t, x) = T(t)X(x)$ uma solução separada (não trivial) do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u \\ u(t, 0) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

Então, com $n \in \mathbb{N}_0$ e a menos de uma constante multiplicativa, temos:

- ☐ $X(x) = e^x \sin^3(nx)$ ☐ $X(x) = e^{-x} \cos(nx)$
☐ $X(x) = e^x \cos(nx)$ ☐ $X(x) = e^{-x} \sin^3(nx)$

12. Determine a solução $u(t, x)$ do seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u + e^x \sin^3 x \\ u(t, 0) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = e^{-x} \cos^3 x - e^x \sin^3 x. \end{cases}$$

Note: pode (e deve) utilizar as respostas das questões **11** e **10**.