

1. Diga qual das seguintes equações admite o factor de integração e^{y^2} .

☐ $2t e^{t^2} + (y^2 + y e^{t^2} + 1) y' = 0$

☐ $e^{t^2} + (2y^2 + 2y e^{t^2} + 1) y' = 0$

☐ $2t e^{t^2} + (2y^2 + 2y e^{t^2} + 2) y' = 0$

☐ $e^{t^2} + (y^2 + y e^{t^2} + 1) y' = 0$

2. Sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, então $e^{\mathbf{A}t}$ é:

☐ $\begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^t - e^{2t} \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 5e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 5e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}$

3. Determine a função $y(t)$ diferenciável em $\mathbb{R}$ que é solução da equação

$$4y - 3t y' = t,$$

e que satisfaz (simultaneamente) as condições

$$y(-1) = 0 \quad \text{e} \quad y(1) = 0.$$

Justifique a unicidade da solução.

4. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2 + 2(y^2 + y - e^{-t}) y' = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

(a) Mostre que e^{t+2y} é um factor de integração da equação diferencial.

(b) Determine a solução do problema e o seu intervalo máximo de definição.

5. Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz 2×2 tal que $e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{bmatrix}$, então a solução $\mathbf{y}(t)$ do problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \quad \text{com} \quad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{é:}$$

☐ $\begin{bmatrix} t-1 \\ \frac{t-1}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} t^2-1 \\ \frac{t^2-1}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} t^2 \\ \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} (t-1)^2 \\ \frac{(t-1)^2}{2} \end{bmatrix}$

6. Sendo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, então $e^{\mathbf{A}t}$ é:

☐ $e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & 2 \sin t \\ -\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix}$ ☐ $e^t \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & 2 \sin t \\ -\sin t & \cos t - 3 \sin t \end{bmatrix}$

☐ $e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & 2 \sin t \\ -\sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$ ☐ $e^t \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & 2 \sin t \\ -\sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$

7. Considere a lista de afirmações seguintes relativas ao problema de valor inicial

$$t y^2 + t^3 - 2t + y y' = 0 \quad \text{com} \quad y(1) = -\sqrt{2}.$$

- I. Um factor de integração da equação diferencial é e^{t^2} .
 II. O intervalo máximo de definição da solução é $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
 III. Um factor de integração da equação diferencial é e^{-t^2} .
 IV. O intervalo máximo de definição da solução é $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

A lista completa de afirmações correctas é:

- ☐ I e II ☐ I e IV ☐ III e IV ☐ II e III.

8. Determine uma função $y(t)$ limitada e diferenciável em $\mathbb{R}$ que é solução da equação

$$(1-t^2) y y' = 2t (1-y^2),$$

e que satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$. A solução é única?