

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas para a aula prática

10ª Semana

1. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{S}$ duas matrizes $n \times n$, com $\det \mathbf{S} \neq 0$. Mostre que

- a) $\text{tr } \mathbf{SAS}^{-1} = \text{tr } \mathbf{A}$.
- b) $\det \mathbf{SAS}^{-1} = \det \mathbf{A}$.
- c) $\det e^{t\mathbf{A}} = e^{t \text{tr } \mathbf{A}}$.

2. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$.

3. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(-2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

6. Use a fórmula da variação das constantes para determinar a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + t^6 \\ y' = -x + 2y + t^5 \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1.$$

7. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.

8. Determine a solução geral das seguintes equações lineares homogêneas:

- a) $y'' - y' - 6y = 0$
- b) $y'' - 6y' + 13y = 0$
- c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
- d) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

9. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

- a) $y''' - y'' + y' - y = 0$ com $y(0) = y'(0) = -y^{(2)}(0) = 1$
- b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ com $y(0) = y'(0) = 1$ e $y^{(2)}(0) = 4$
- c) $y''' + 5y'' + y = 0$ com $y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = 0$

10. Considere a seguinte equação linear homogênea:

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y'' - 8y' + 4y = 0$$

- a) Mostre que a função $e^t \cos t$ é uma solução particular desta equação.
- b) Determine a solução geral.