

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas para a aula prática

9ª Semana

1. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6t \sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

diferente da solução $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

2. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 \end{cases}.$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{1}{3(u(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}},$$

e integre esta relação entre 0 e t .

3. Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} y' = -y g(t, y) + e^{-t} \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow [1, +\infty[$ tem derivadas parciais contínuas para todo o $(t, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Mostre que a solução da equação dada está definida para todo o t positivo.
- O que pode dizer quanto ao limite de y quando $t \rightarrow +\infty$?

4. Mostre que o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y^{1/2} \quad \text{e} \quad y(0) = 0.$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$(1-t)y\frac{dy}{dt} = 1 - y^2 \quad \text{com} \quad y(1/2) = 2.$$

- (i) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.
- (ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.
- (iii) Diga, justificando, porque não há contradição com o Teorema de Picard.

6. Considere as seguintes matrizes:

$$(i) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (ii) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (iii) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para cada uma das matrizes $\mathbf{A}$ acima indicadas, responda às seguintes questões:

- a) Calcule $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ e $\mathbf{A}^4$.
- b) Intua uma fórmula para $\mathbf{A}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e demonstre-a pelo princípio de indução matemática.
- c) Calcule $e^{t\mathbf{A}}$ através da definição (i.e. $e^{t\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n$).

7. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,

Determine uma matriz $\mathbf{S}$ invertível tal que $\mathbf{AS} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}$, onde $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal. Calcule $e^{t\mathbf{A}}$ através da igualdade $e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{S}e^{t\mathbf{\Lambda}}\mathbf{S}^{-1}$ e use esta matriz para encontrar a solução $\mathbf{x}(t)$ do problema de valor inicial:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}, \text{ com } \mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}$.

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

10. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.