

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas para a aula prática

7ª Semana

1. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais, indicando os intervalos de definição das funções.

a) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$

b) $x' = -tx$

c) $\frac{dy}{dt} + y \cos t = 0$

d) $\psi' = \psi - t$

e) $\frac{dy}{dt} - y \sin t = e^{-\cos t}$

f) $g'(t) = 2t g(t) + t$

g) $w' = \frac{2t}{1+t^2}w + t^2 - 1$

2. Determine a solução do seguintes problemas de valor inicial, indicando os intervalos máximos de definição:

a) $\frac{dy}{dt} + \sqrt{1-t^2} y = 0, y(0) = e^5.$

b) $L \frac{di}{dt} + Ri = V \sin t, i(0) = 0.$

c) $x' = 2tx + t, x(0) = 1.$

d) $x' + h(t)x - t = 0, x(-1) = 2, \text{ com } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$

e) $(1+t) \frac{dy}{dt} + \frac{y}{2} = (1+t)^{\frac{5}{2}}, y(0) = 1$

3. O modelo mais simples para evaporação de uma gota de água esférica é supor que a diminuição de volume da gota se processa a uma taxa proporcional à sua superfície.

a) Qual o tempo necessário para que uma gota de raio R_0 se evapore completamente?

b) Se supusermos que a taxa de diminuição de volume da gota é proporcional ao *quadrado* da sua superfície, quanto tempo demora uma gota de raio R_0 a evaporar-se completamente?

4. Num reservatório contendo um quilolitro de água é introduzido um resíduo industrial a um caudal de um litro por minuto. A mistura é instantaneamente homogeneizada e despejada do reservatório à mesma taxa. Determine a concentração do resíduo no reservatório ao fim de T minutos e calcule quanto tempo é necessário decorrer até a concentração do resíduo atingir 20%.

5. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

a) $u' = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$.

b) $\varphi' = e^{\varphi-t}$.

c) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$.

6. Nas alíneas seguintes determine a solução do problema de Cauchy e o intervalo máximo de existência de cada solução :

a) $\cos y \frac{dy}{dt} = \frac{-t \operatorname{sen} y}{1+t^2}$, $y(1) = \frac{3\pi}{4}$.

b) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y-yt^2}$, $y(2) = 3$.

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t \log(1+t^2)}{\cos y}$, $y(0) = \pi$.

d) $\frac{dy}{dt} = \sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 0$.

e) $y \frac{dy}{dt} = t$, $y(1) = \alpha$.

7. Determine $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$, onde a função $y(t)$ é solução do problema

$$y' = \frac{t - 2t^2}{7y^6 + 3y^2 + 1} \quad \text{com} \quad y(0) = 0.$$

8. Determine a solução do problema de Cauchy $3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0$, $x(0) = -1$, e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

9. Determine a constante α para a qual a equação diferencial seguinte é exacta e resolva-a:

$$ty(y + \alpha e^{\alpha t^2 y}) + t^2(y + e^{\alpha t^2 y}) \frac{dy}{dt} = 0.$$

10. Resolva o seguinte problema de valor inicial e determine o intervalo de definição da solução:

$$\begin{cases} y \cos t + 2(y^2 + \operatorname{sen} t) \frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$