

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas para a aula prática

6ª Semana

1. Considere a lista de afirmações seguintes relativas à função

$$f(x + iy) = e^{-y} (x \cos x - y \sin x) + i e^{-y} (y \cos x + x \sin x).$$

- I. f satisfaz as equações de Cauchy Riemann.
- II. f não é analítica em $\mathbb{C}$.
- III. $f'(x + iy) = e^{-y} [(1 - y) \cos x - x \sin x] + i (x \cos x + (1 - y) \sin x)$.
- IV. $f'(x + iy) = e^{-y} [(1 - y) \cos x - x \sin x] + i ((1 - y) \cos x - x \sin x)$.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e IV

☐ II e III

☐ II e IV

☐ I e III.

2. Considere a função $f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}$. Diga qual o interior da região de convergência do desenvolvimento de $f(z)$ em série de Laurent centrado no ponto $z = 1 - i$ que é convergente no ponto $z = i$.

- ☐ $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1 + i| < 2\}$
- ☐ $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 1 + i| < 2\sqrt{2}\}$
- ☐ $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 1 + i|\}$
- ☐ $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1 + i| < 2\sqrt{2}\}$

3. Para o integral

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta}{2 + \sin 3\theta} d\theta$$

diga qual das igualdades seguintes é verdadeira:

- ☐ $I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z^3 - z^{-3} - 4i} dz.$
- ☐ $I = \oint_{|z|=1} \frac{-8(z^3 + z)}{z^6 - 3z^4 - 16iz^3 + 3z^2 - 1} dz.$
- ☐ $I = \oint_{|z|=1} \frac{z^3 + z}{z^6 + 4iz^3 - 1} dz.$
- ☐ $I = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{z^3 + z}{z^6 - 3z^4 - 1} dz.$

4. Considere a lista de afirmações seguintes relativas à função

$$f(z) = \frac{e^z \operatorname{sen}(iz)}{z(e^z + 1)^2}.$$

- I. f tem um pólo simples em $z = -i\pi$.
- II. f tem uma singularidade essencial em $z = 0$.
- III. f tem um pólo duplo em $z = i\pi$.
- IV. f tem uma singularidade removível em $z = 0$.

A lista completa de afirmações correctas é:

- ☐ I e II ☐ I e IV ☐ III e IV ☐ II e III.

5. Considere a função $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$. Diga qual o desenvolvimento de $f(z)$ em série de Laurent convergente na região $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 2| < 3\}$.

- ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2} (z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} (z-2)^n$
- ☐ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} (1-n) (z-2)^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{3}\right)^n (n+1) (z-2)^n$
- ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2} (z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} (z-2)^n$
- ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$

6. Considere uma função $f(z)$ analítica em $\mathbb{C}$, cuja parte real é $u(x, y) = x^2 - y^2 - xy$. Sendo C a circunferência de centro na origem e raio 2 percorrida no sentido positivo, determine o valor do integral:

$$I = \oint_C \frac{f(z^2)}{(z-i)^2} dz$$

- I. $I = i2\pi f'(-1)$.
- II. $I = -4\pi f'(-1)$.
- III. $I = 8\pi + i4\pi$.
- IV. $I = 2\pi - i4\pi$.

A lista completa de afirmações correctas é:

- ☐ I e IV ☐ II e III ☐ II e IV ☐ I e III.

7. Indique o valor do integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 4} dx.$$

$$\square I = \frac{\pi}{5}$$

$$\square I = \frac{\pi}{3}$$

$$\square I = \frac{\pi}{4}$$

$$\square I = \frac{\pi}{6}$$

8. Considere a lista de afirmações seguintes relativas à função

$$f(z) = \frac{1}{2z^3 - 4iz^2 - 2z} - ze^{\frac{1}{z}}.$$

$$\text{I. } \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -1.$$

$$\text{II. } \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 1.$$

$$\text{III. } \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{IV. } \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2}.$$

A lista completa de afirmações correctas é:

$$\square \text{ I e II}$$

$$\square \text{ I e IV}$$

$$\square \text{ III e IV}$$

$$\square \text{ II e III.}$$

9. Sendo C a elipse $|z| + |z - 2\pi| = 3\pi$ percorrida uma vez no sentido positivo, calcule o integral

$$\oint_C \frac{z}{e^{iz} - e^z} dz.$$

10. Sendo C a elipse $|z - 1| + |z - 2| = 4$ percorrida uma vez no sentido positivo, calcule o integral

$$\oint_C \frac{1}{z^5 - iz^4 - z^3 + iz^2} dz.$$