

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas para a aula prática

5ª Semana

1. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções. Calcule os resíduos correspondentes.

$$\text{a)} \quad f_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z - \pi}. \quad \text{b)} \quad f_2(z) = \frac{z}{(z^2 + 2)^2}.$$

$$\text{c)} \quad f_3(z) = \frac{1}{z^7(1 - z^2)}. \quad \text{d)} \quad f_4(z) = \frac{z \operatorname{sen} z}{(z - \pi)^6}.$$

$$\text{e)} \quad f_5(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}. \quad \text{f)} \quad f_6(z) = \frac{1 - \cos z}{z \operatorname{sen} z}.$$

$$\text{g)} \quad f_7(z) = \frac{z - \pi/2}{\cos z}. \quad \text{h)} \quad f_8(z) = \frac{1 + z}{z^2 - z^4} + z^5 \operatorname{sen} \frac{1}{z^2}.$$

2. Justifique que a função

$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{z}}$$

tem uma singularidade em $z = 0$ que **não é isolada**.

3. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular (considere sempre as curvas indicadas percorridas uma vez no sentido positivo)

$$\text{a)} \quad \oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz.$$

$$\text{b)} \quad \oint_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\pi - z)} dz.$$

$$\text{c)} \quad \oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3} dz.$$

4. Calcule:

$$\oint_C \frac{1}{e^{z^2} - 1} dz,$$

onde C é a circunferência $|z| = \sqrt{7}$ percorrida no sentido positivo.

5. Utilize o Teorema dos Resíduos para obter os seguintes valores:

$$\text{a)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2} + \cos(\theta)} d\theta = -\pi (\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{b)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{(5 - 4\cos(\theta))^2} d\theta = \frac{7}{54}\pi \quad (\text{Sugestão: } \cos(3\theta) = \operatorname{Re}(e^{i3\theta}))$$

6. Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração adequado, os seguintes resultados:

$$\text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{1}{12}\pi$$

$$\text{b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{\pi}{54}$$

7. Com base no Teorema dos Resíduos e no Lema de Jordan, obtenha os seguintes resultados:

$$\text{a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$\text{b)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

8. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

$$\oint_C \frac{z^4 + 1}{z^2(2z^2 + 5z + 2)} dz,$$

onde C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorrida no sentido positivo. Aproveite este resultado para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} d\theta.$$

9. Utilizando o Teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^n} dx,$$

onde n é um natural maior ou igual que 2.

Sugestão: Considere a fronteira da região $\{z = \rho e^{i\theta} : \rho \in]0, R[, \theta \in]0, \frac{2\pi}{n}[\}$, com $R > 1$.

10. Seja $f(z) = \frac{z \operatorname{sen}(z)}{\cos(z) - 1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k(z - 4i)^{k-1}}$, e $D(f)$ o seu domínio de definição.

a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função $z \operatorname{sen}(z)$ em potências de $z - 2\pi$.

b) Determine o interior da região de convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k(z - 4i)^{k-1}}$.

c) Classifique, justificando, as singularidades de f e determine os respectivos resíduos.