

Análise Matemática IV

LEA LEN LEMAT LEM

1º Semestre de 2006/07

Problemas para a aula prática

4ª Semana

1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela fórmula $u(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy$, onde α, β e γ são constantes reais.

- a) Determine α, β e γ de modo a que u seja a parte real de uma função analítica f que satisfaz a igualdade:

$$f''(i-1) = 1+i.$$

- b) Utilizando uma função f com as propriedades impostas na alínea anterior calcule os integrais

$$\text{i-} \quad \oint_C \frac{f'(z)}{z(z+i)} dz \quad \text{ii-} \quad \oint_C \frac{f(iz)}{(z-1-i)^3} dz$$

onde C designa a elipse $|z-1|+|z-i|=3$ percorrida uma vez no sentido positivo.

2. Considere a função $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x, y) = \text{Re}[g(x+iy)]$ e $v(x, y) = \text{Im}[g(x+iy)]$.

- a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g ?
- b) Mostre que u é uma função harmónica.
- c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\text{Re}(f) = u$.

3. Para que valores de z é a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$ convergente?

4. Determine o interior da região de convergência das seguintes séries de potências:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z-i)^n}{n^4+1} \quad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n^2+n}{3n^2+2n+1} \right)^n (z+1-i)^n$$

$$\text{c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z+1)^n \quad \text{d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$$

$$\text{e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+1)^{2n}}{n^2} \quad \text{f)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 5^n (3z+2i)^{2n}$$

5. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{onde} \quad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ par} \\ 3^n & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}.$$

- a) Determine o seu raio de convergência.
 b) Sabendo que esta é a série de Maclaurin de uma função f , analítica em todo o seu domínio aberto e conexo, calcule $f(1)$.

6. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos indicados:

- a) $\sin z$, em torno de $z = \pi$. b) e^z , em torno de $z = i2\pi$.
 c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$. d) $\frac{1}{z-1}$, em torno de $z = 2 + 3i$.
 e) $\frac{1}{(z-i)^2}$, em torno de $z = 0$. f) $\frac{1}{(z-1-i)^3}$, em torno de $z = i$.

7. Considere a função $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$. Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z - 2$.

8. Para cada função e região indicadas, determine os desenvolvimentos de Laurent:

- a) $\frac{1}{z-1}$, na região $|z| > 1$.
 b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z \right)$, na região $|z| > 0$.
 c) $\frac{z-i}{(z-2i)^2}$, na região $|z-i| > 1$.
 d) $(3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3} \right)$, na região $|z| > 0$.

9. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2 - 1)^2}$ nas seguintes regiões:

- a) $0 < |z-1| < 2$; b) $2 < |z-1|$.

e aproveite os resultados para calcular os seguintes integrais: $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz$ e

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2 - 1)^2} dz.$$

10. Calcule

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{((z-i)^2 + (z-i) - 6)(z-i)^{20}} dz.$$

Sugestão: Considere $\xi = z - i$ e desenvolva $\frac{1}{\xi^2 + \xi - 6}$ em série de potências de ξ .